ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

489

SYSTÈMES DE RÉFÉRENCE ET MOUVEMENTS

(Physique relativiste)

PAR

Augustin SESMAT

Professeur d'Histoire et de Critique des Sciences
à l'Institut Catholique de Paris

IV

PRINCIPES DE LA THÉORIE GÉNÉRALE

PARIS

HERMANN & Cie, ÉDITEURS

6, Rue de la Sorbonne, 6

1937

B. S. Mohavathy

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

489

SYSTÈMES DE RÉFÉRENCE ET MOUVEMENTS

(Physique relativiste)

PAR

Augustin SESMAT

Professeur d'Histoire et de Critique des Sciences
à l'Institut Catholique de Paris

IV

PRINCIPES DE LA THÉORIE GÉNÉRALE

PARIS

HERMANN & C^ie^, ÉDITEURS

6, Rue de la Sorbonne, 6

—

1937

DU MÊME AUTEUR :

(Librairie Hermann)

I. — SYSTÈMES DE RÉFÉRENCE ET MOUVEMENTS

(*Physique classique*)

I. — **Le problème des mouvements réels.**
II. — **L'Ancienne astronomie, d'Eudoxe à Descartes.**
III. — **Mécanique newtonienne et gravitation.**
IV. — **Le système absolu de la mécanique.**
V. — **L'optique des corps au repos.**
VI. — **L'optique des corps en mouvement.**
VII. — **L'esprit de la science classique.**

II. — SYSTÈMES DE RÉFÉRENCE ET MOUVEMENTS

(*Physique relativiste*)

I. — **Genèse des théories de la relativité.**
II. — **Principes de la théorie restreinte.**
III. — **Les systèmes privilégiés de la théorie restreinte.**
IV. — **Principes de la théorie générale.**
V. — **Théorie relativiste de la gravitation.**
VI. — **Les systèmes privilégiés de la théorie générale.**
VII. — **Essai critique sur la doctrine relativiste.**

CHAPITRE III

LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

Article IX

TRANSITION : LE PRINCIPE D'ÉQUIVALENCE

70. La nouvelle dynamique et la gravitation : premiers essais de conciliation.

Aussitôt construite la théorie de la Relativité restreinte, se posait le problème d'une généralisation possible du principe de Relativité : l'équivalence des systèmes de référence pour l'étude des lois physiques ne pouvait-elle s'étendre aux systèmes accélérés aussi bien qu'aux systèmes d'inertie ; et corrélativement n'avait-on pas le droit d'affirmer la relativité des accélérations aussi bien que celle des mouvements r. et u. ?

C'est la réponse apportée à ce problème par Einstein qui nous intéresse. Elle devait consister finalement dans la *théorie de la Relativité générale*, mais Einstein n'y parvint pas d'emblée. Il nous a d'ailleurs retracé lui-même l'évolution de ses idées sur la question (1) : inspirons-nous de son récit dans notre exposé ; rien sans doute ne saurait mieux nous préparer à comprendre sa théorie que de reparcourir le chemin par où il y est arrivé.

Ce n'est pas par conséquent un exposé déductif et rapide de la doctrine qu'on doit attendre de nous, exposé qui supposerait

---

(1) A. Einstein : *Comment je vois le Monde*, 1 vol., Paris, 1934, p. 234 sq.

au point de départ des notions difficiles à comprendre. Notre méthode au contraire va nous conduire — au risque de revenir plusieurs fois sur les mêmes questions — à procéder par approches successives, en ayant soin de rattacher chacun de nos progrès dans l'intelligence de la théorie à ce que nous savions précédemment.

Au point de vue *purement cinématique*, nous dit Einstein, la relativité des accélérations n'était pas moins évidente que celle des translations r. et u. ; mais la *physique*, par le fait même qu'elle attribuait aux systèmes d'inertie un privilège sur les systèmes accélérés, obligeait à reconnaître aux accélérations une signification absolue. Mach avait bien proposé de rapporter les accélérations à l'ensemble des masses ; et cette idée exerçait sur l'esprit d'Einstein « une sorte de fascination » (1) ; mais sous sa forme générale elle ne fournissait nullement le moyen d'édifier une théorie précise.

C'est en essayant de résoudre dans le cadre de la relativité restreinte le problème de la gravitation qu'Einstein fit pour la première fois « un pas en avant ». On ne pouvait pas garder l'hypothèse d'une action instantanée à distance, puisque pour des événements concernant deux points matériels en mouvement relatif il n'y a plus de temps commun ni par suite de simultanéité. Il fallait donc adopter une théorie de champ ; c'est-à-dire, au lieu de considérer des forces s'exerçant entre les masses prises deux à deux, déterminer en chaque point de l'espace les forces dues à l'influence de toutes les masses, eu égard à leur distribution, pour déduire de ces forces l'accélération d'une masse quelconque située en ce point.

C'est ce qu'avaient fait Laplace et Poisson en créant la théorie du potentiel de gravitation, le premier pour le vide, le second pour les régions remplies de matière. Ces deux physiciens n'avaient d'ailleurs prétendu qu'exprimer équivalemment la loi de Newton, et nullement la modifier.

Or pour exprimer cette loi il suffisait d'un potentiel *scalaire*, c'est-à-dire indépendant de la direction : était-il possible de conserver un potentiel aussi simple, et, en substituant simplement à la masse invariable de Newton la masse variable de la

---

(1) *Ibid.*, p. 235.

nouvelle dynamique, de rester d'accord avec l'expérience ? Il apparut tout de suite que non ; en effet d'après l'expérience, — ou plutôt d'après la théorie classique où l'expérience est intégrée — la chute libre d'un point matériel dans un champ de gravitation est indépendante de la vitesse horizontale de ce point : or d'après la théorie restreinte un point matériel doit opposer aux forces verticales du champ une résistance variable avec sa vitesse horizontale, v, puisque dans ce cas c'est sa masse $\dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^n}{c^2}}}$ qui intervient. De même la chute d'un corps est indépendante de l'énergie interne de ce corps ; or d'après la théorie de l'inertie de l'énergie la masse d'un corps s'accroît quand augmente son énergie totale. Pour expliquer dans ces conditions la simplicité des lois de la chute il aurait fallu un potentiel assez compliqué pour compenser ces variations de la masse, ce qui paraissait impossible avec un potentiel scalaire quel qu'il soit.

Mais, quelle était d'après la théorie classique la raison profonde de cette indépendance totale du mouvement de chute libre par rapport à la masse des corps ? — L'égalité absolue de la masse *pesante* d'un corps quelconque et de sa masse *inerte*, c'est-à-dire de la masse qui détermine la grandeur de la force appliquée au corps en tel point du champ et de la masse qui résiste à cette force pour déterminer la grandeur de l'accélération. C'est cette égalité, admise par Newton comme un postulat, qui retint bientôt toute l'attention d'Einstein et qui le conduisit, en 1911, d'une part à une interprétation nouvelle du champ de gravitation, d'autre part à une hypothèse hardie concernant l'influence du champ de gravitation sur les phénomènes physiques, hypothèse qu'il appela *le principe d'équivalence* [1].

Bien que cette hypothèse n'ait pas été conservée telle quelle, nous allons lui consacrer tout cet article, parce qu'elle fut pour Einstein une étape à la fois historique et logique vers la solution du double problème de la gravitation et de la généralisation du principe de relativité.

---

[1] Einstein : *Influence de la pesanteur sur la propagation de la lumière*, Das Relativitäts Prinzip, p. 72-80.

71. Egalité de la masse inerte et de la masse pesante d'un corps quelconque d'après la théorie classique. — Revenons de la théorie du champ à la forme primitive de la théorie de Newton. La masse *pesante* d'un corps — désignons-la par μ — est un coefficient attaché au corps et qui dans l'expression générale de la loi de Newton contribue à déterminer en grandeur la force attractive subie par le corps : $f = G\frac{\mu\mu'}{r^2}$. Quand il s'agit de la pesanteur, où l'action du corps sur la terre est négligeable, et où l'intensité g de la pesanteur est regardée comme constante en une région donnée, la masse pesante détermine le poids p du corps : $p = \mu g$.

La masse *inerte*, que nous pouvons désigner par m, mesure la résistance d'inertie opposée par un corps à l'action d'une force quelconque, et en particulier à l'action de son poids.

Newton postule que les poids des corps sont rigoureusement proportionnels à leurs masses inertes, autrement dit que masses pesantes et masses inertes sont égales si l'unité de masse pesante et l'unité de masse inerte sont définies au moyen du même corps.

Ne pouvait-on mettre en doute cette égalité ? Il y a beaucoup de phénomènes mécaniques dont la théorie fait intervenir concurremment les deux masses, spécialement les phénomènes où s'introduisent à la fois la pesanteur et telle ou telle force d'inertie.

C'est le cas des variations de la direction du fil à plomb aux différents points de la surface terrestre : cette direction en effet est déterminée par la résultante de deux forces ; d'une part une force réelle, le poids du corps pesant, dirigée vers le centre de la Terre ; d'autre part une force fictive, la force centrifuge $\frac{mv^2}{r}$, dirigée perpendiculairement à l'axe de rotation de la Terre et qui dépend de la masse inerte du corps en même temps que de la vitesse linéaire de rotation, v, de la Terre au point où l'on se trouve, et du rayon r décrit par ce point. On pouvait invoquer un fait général en faveur de l'égalité absolue des deux masses ; c'est que pour faire avec succès la théorie de tous les phénomènes en question on n'avait jamais été obligé de leur attribuer dans les formules des valeurs différentes. C'est cependant pour lever tout doute à ce sujet que de 1890 à 1896 Eotvös institua des expériences très précises dans lesquelles deux corps d'espèces différentes, de masses inertes m_1 et m_2, et de masses pesantes μ_1 et μ_2 très voisines, influaient sur l'équilibre d'une balance de torsion

chacun par son poids, donc par sa masse pesante, et aussi en vertu de la force centrifuge, donc par sa masse inerte. Une différence relative de 5.10^{-8} entre les deux rapports $\alpha = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ et $a = \frac{m_1}{m_2}$ aurait pu se manifester par une rotation observable du fléau quand, ayant réalisé l'équilibre pour une orientation donnée de l'appareil, on le faisait tourner de 180°. Aucune rotation n'ayant pu être observée avec divers couples de corps de diverses espèces, Eotvös en conclut que pour tous ces corps les deux rapports devaient être regardés comme égaux à l'approximation indiquée (1).

C'était donc un fait expérimental solidement établi que celui de l'égalité des deux masses : nous allons voir maintenant ce qu'Einstein crut pouvoir en déduire.

72. Equivalence classique d'un champ de gravitation uniforme et d'une accélération constante du système de référence. — L'égalité des deux masses pesante et inerte fait que le champ de gravitation est *un champ d'accélération*, c'est-à-dire qu'en un point donné ce champ impose à tous les corps, quels que soient leur masse (supposée assez petite), leur nature ou leur état, des accélérations égales.

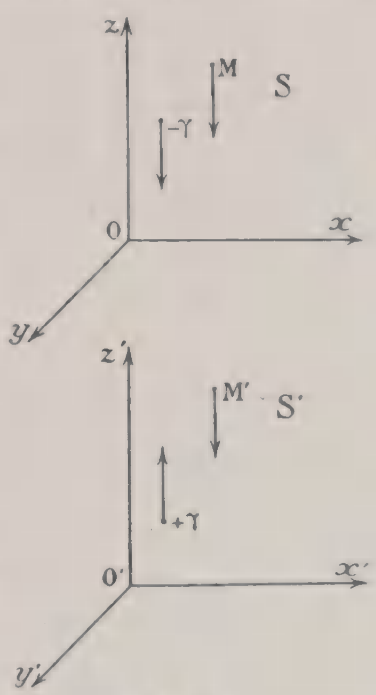

Fig. 9 et 9′.

Considérons donc un champ de pesanteur uniforme, d'intensité $-\gamma$; et rapportons les phénomènes qui s'y passent à un trièdre de référence $oxyz$ constituant un système d'inertie S : nous supposons que les lignes de force du champ sont orientées suivant les oz négatifs (fig. 9). Considérons d'autre part dans un espace sans gravitation un trièdre $o'x'y'z'$ dont les trois axes soient respectivement parallèles à ceux de $oxyz$, mais qui soit

(1) Des expériences analogues effectuées en 1917 par Zeemann sur des corps *radioactifs* devaient montrer que l'égalité des rapports n'était pas affectée d'une façon appréciable par les variations de l'énergie interne de ces corps.

animé par rapport au système d'inertie S d'un mouvement d'accélération constante $+\gamma$ suivant les $o'z'$ positifs (fig. 9') : ce trièdre constitue un système uniformément accéléré, S'.

Admettons la validité des lois de la dynamique classique et étudions le mouvement d'un point matériel isolé relativement à nos deux systèmes. Par rapport à S un point M isolé, c'est-à-dire soumis aux seules forces du champ, prend une accélération constante $-\gamma$ parallèlement à oz et dans le sens zo, cela parce que le champ est un champ d'accélération.

Par rapport à S' un point M' isolé, c'est-à-dire ici soustrait à l'action de toute force, prend une accélération constante $-\gamma$ parallèlement à $o'z'$ et dans le sens $z'o'$; ceci parce que obéissant à la loi d'inertie il aurait par rapport à un système d'inertie, S par exemple, une vitesse constante, et que vu d'un système animé d'une accélération rectiligne $+\gamma$ il a une accélération relative égale à celle de ce système mais changée de signe. Relativement aux deux systèmes donc, un point isolé a la même accélération. Il serait impossible à deux observateurs liés chacun à l'un des systèmes de déduire du mouvement du point le repos ou le mouvement du système, ou la présence ou l'absence du champ. *Au point de vue des phénomènes mécaniques intérieurs observables, l'existence d'un champ en l'absence d'accélération du système et l'existence d'une accélération du système en l'absence d'un champ sont choses équivalentes.*

73. Le principe d'équivalence d'Einstein. — Pour les classiques, l'équivalence dont nous venons de parler était une simple conséquence sans intérêt des principes connus de la mécanique et de l'égalité de la masse pesante et de la masse inerte.

Einstein s'inspirant manifestement du postulat général du mouvement relatif y vit le corollaire d'un principe nouveau, principe qui identifiait champ de gravitation (uniforme) et accélération (constante) du système de référence ; qui tendait par suite à nier l'objectivité de la différence admise par les classiques entre les deux cas et à n'y voir que la conséquence du choix arbitraire du système, conséquence relative à ce choix et sans portée absolue : si je m'en tiens à ce que j'observe, se dit-il, je puis dire indifféremment, dans les deux cas, ou que je suis au repos dans un champ ou que je subis un mouvement uniformément accéléré

dans un espace sans champ ; l'accélération que je m'attribuais dans le deuxième cas n'a pas plus de signification absolue que le champ dont j'affirmais l'influence dans le premier cas (1).

Mais si c'était vraiment là un nouveau principe, ce principe devait avoir des conséquences ailleurs qu'en mécanique : Einstein émit l'hypothèse que ce postulat de l'*équivalence d'un champ de gravitation uniforme et d'une accélération constante du système de référence est valable non seulement pour les phénomènes mécaniques, mais pour tous les phénomènes physiques* ; que par exemple les modifications que subissent, d'après les lois de l'optique des corps en mouvement, les phénomènes lumineux du fait d'un mouvement accéléré commun des deux corps intéressés se produisent aussi quand il s'agit de deux autres corps dépourvus d'accélération mais qui sont au repos dans un champ équivalent, du point de vue mécanique, à l'accélération des deux premiers corps.

Einstein attribuait dès 1911 à ce postulat une grande importance et une grande valeur heuristique ; d'autant, ajoutait-il, que si l'on s'inspire de certains résultats de la théorie de la relativité (restreinte) on peut en déduire plusieurs conséquences importantes, les unes très satisfaisantes au point de vue théorique, les autres admissibles en elles-mêmes mais de plus susceptibles d'un contrôle expérimental. Comme conséquence théorique il signale l'extension à la masse pesante des variations de la masse inerte d'un corps en fonction de son énergie ; comme conséquences vérifiables l'influence de la gravitation sur certains phénomènes lumineux. Voyons comment les unes et les autres se déduisaient de son principe.

74. La pesanteur de l'énergie, déduite du principe d'équivalence. — Rappelons d'abord, d'après la théorie relativiste de l'optique des corps en mouvement, les effets de la vitesse d'un récepteur R par rapport au système d'inertie S où est fixée une source lumineuse L, sur la mesure de l'énergie rayonnante issue de cette source : on raisonne sur l'énergie contenue dans une sphère de rayon donné et ayant pour centre le point d'émission.

Appelons E la mesure de cette énergie pour un observateur au repos dans le système S, et E′ la mesure de la même énergie

(1) Einstein : *Influence de la pesanteur*, Rel. Prinzip, p. 73.

pour un récepteur R animé par rapport à S d'une vitesse constante v : Einstein a établi dans son mémoire de 1905 que, si R s'éloigne radialement de la source, on a, en se limitant aux termes du premier ordre en $\beta = \frac{v}{c}$,

$$E' = E(1 - \beta) ;$$

et que si R se rapproche radialement on a

$$E' = E(1 + \beta) :$$

l'énergie est plus faible pour l'observateur qui fuit devant le rayonnement, plus grande pour l'observateur qui va au devant.

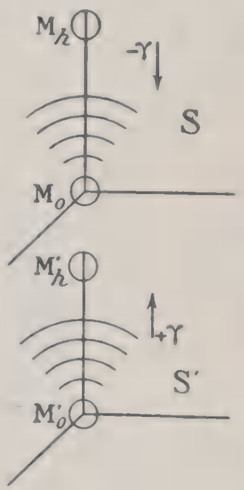

Fig. 10 et 10′.

Cela posé, revenons avec Einstein [1] à notre système d'inertie S dans lequel régnait un champ de gravitation uniforme d'intensité $-\gamma$ suivant zo ; et considérons dans ce système de référence deux petits systèmes matériels, M_0 et M_h, pourvus chacun d'instruments de mesure de même fabrication, et situés le premier à l'origine du système, l'autre sur oz à une distance de l'origine $oz = h$ (fig. 10). Nous admettons que les instruments des deux systèmes supposés réunis en un même point du champ fourniraient d'une même grandeur physique quelconque des mesures identiques.

Supposons qu'en M_0 se trouve une source de lumière et en M_h un récepteur et cherchons à comparer les valeurs d'une même quantité d'énergie émise en M_0 et reçue en M_h, cette quantité étant mesurée dans les deux endroits avec les instruments locaux.

Si la gravitation n'avait aucune influence sur les phénomènes lumineux, il y aurait égalité des deux mesures puisque M_0 et M_h sont tous deux au repos dans un même système d'inertie. Mais le principe d'équivalence nous avertit que nous devons nous attendre à une influence du champ sur les résultats, la même que celle de l'accélération équivalente au champ. C'est donc cette accélération que nous devons faire intervenir comme moyen

(1) *Ibid* : p. 74-76.

de calcul, en nous référant au système accéléré S′, et en y considérant une source M'_0 et un récepteur M'_h placés dans S′ comme M_0 et M_h dans S (fig. 10′).

Mais allons-nous nous soumettre à toutes les exigences de la théorie de la relativité restreinte ? Si nous voulons le faire, ce qui est possible, nos calculs seront assez compliqués ; en effet la théorie n'étant établie que pour les systèmes d'inertie nous ne pouvons nous référer à chaque instant qu'à un seul système d'inertie ayant alors même vitesse que notre système accéléré ; donc pour deux phénomènes se passant à deux instants différents nous devrons changer de système d'inertie et introduire dans notre problème toutes les variations relativistes des grandeurs. Pour éviter ces complications décidons une fois pour toutes de négliger — comme Einstein lui-même le fit dans son exposé —, celles de ces variations qui sont du second ordre en $\frac{v}{c}$, ce qui simplifiera les choses sans compromettre la validité des raisonnements.

Soit alors S_0 un système d'inertie par rapport auquel la vitesse de S′, donc aussi celle de M'_0, était nulle au moment de l'émission. Par rapport à ce même système la vitesse de S′, donc aussi celle de M'_h, sera, au moment de la réception, $v = \gamma t$ si t est le temps de transmission ; c'est-à-dire $v = \gamma \frac{h}{c}$, puisque le trajet à parcourir par la lumière est $\overline{M'_0 M'_h} = h$.

Cette vitesse v de M'_h par rapport à S_0 est une vitesse radiale d'*éloignement* du récepteur M'_h par rapport au système où la source M'_0 se trouvait lors de l'émission : donc nous devons appliquer la formule

$$E' = E(1 - \beta),$$

qui donne l'énergie reçue E′ en fonction de l'énergie émise E. Ici nous avons

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{\gamma h}{c^2};$$

par conséquent si nous appelons E'_0 l'énergie mesurée au point d'émission et E'_h l'énergie mesurée au point de réception, nous avons

$$E'_h = E'_0\left(1 - \frac{\gamma h}{c^2}\right).$$

Tel serait l'effet du mouvement du récepteur sur l'évaluation de l'énergie : ce serait une *altération apparente de la grandeur mesurée*, comme dans le cas de la mesure d'une longueur. Mais notre calcul n'était pour nous qu'un moyen pour déterminer l'influence du champ : revenant donc à notre système d'inertie S, à notre champ de gravitation uniforme et à nos deux systèmes matériels, la source M_0 et le récepteur M_h, nous devons affirmer, en vertu du principe d'équivalence, que l'on constatera entre la mesure E_0 de l'énergie émise en M_0 et la mesure E_h de l'énergie reçue en M_h la même différence que nous venons de trouver en raisonnant sur le système S', c'est-à-dire que l'on aura encore

$$E_h = E_0\left(1 - \frac{\gamma h}{c^2}\right).$$

Seulement, et c'est ici le point capital, nous ne pouvons plus interpréter cette différence comme une altération apparente d'une même grandeur, causée par le mouvement de l'observateur, puisqu'ici il n'y a plus de mouvement. Nous sommes conduits à dire que *la différence n'affecte plus seulement les mesures, mais les grandeurs mesurées elles-mêmes* ; que les énergies étant aussi correctement mesurées en M_h qu'en M_0 elles sont réellement différentes : dans le cas envisagé l'énergie reçue est, en réalité, plus petite que l'énergie émise.

Pour généraliser commodément ce résultat demandons-nous comment a voyagé l'énergie transmise par rapport aux forces du champ : elle est allée dans notre exemple à l'encontre de ces forces, et elle s'est trouvée moindre à la réception qu'à l'émission. Si au contraire elle avait été émise en M_h et reçue en M_0, elle aurait voyagé dans le sens du champ ; mais alors dans le recours à l'accélération équivalente au champ on aurait été conduit à attribuer au récepteur une vitesse de rapprochement et non plus d'éloignement ; et l'énergie se serait trouvée plus grande à la réception qu'à l'émission, selon la formule

$$E_0 = E_h\left(1 + \frac{\gamma h}{c^2}\right).$$

Présentés sous cette forme nos résultats sont encore vrais dans le cas d'un champ variable, pourvu toutefois que dans tout l'intervalle des deux points considérés il varie dans le même sens. Nous pouvons donc dire que *quand de l'énergie rayonnante voyage*

à l'encontre des forces d'un champ de gravitation — par exemple du soleil vers la terre — *elle est plus petite à l'arrivée qu'au départ* ; et que *quand elle voyage dans le sens des forces du champ* — par exemple de la Terre vers le soleil — *elle est plus grande à l'arrivée qu'au départ.*

Comment, se demande alors Einstein, ces résultats sont-ils conciliables avec le principe de la conservation de l'énergie? Considérons le cas d'une énergie E émise en M_h ; elle voyage dans le sens du champ et arrive en M_0 ; l'énergie reçue E_1 est alors

$$E_1 = E\left(1 + \frac{\gamma h}{c^2}\right);$$

il y a un *excès* d'énergie reçue égal à $E\,\frac{\gamma h}{c^2}$: d'où peut-il venir ? Einstein répond que *ce supplément d'énergie existait dans l'énergie émise*, mais *sous forme d'énergie potentielle relative au champ* — c'est-à-dire d'énergie qui en cédant au champ se transforme en énergie actuelle — ce qui sauve le principe de conservation.

Or, qu'est-ce qui est capable de contenir de l'énergie potentielle relativement à un champ de pesanteur ? Une masse pesante, évidemment, masse qu'on attribuera à l'énergie rayonnante émise, comme dans la nouvelle dynamique on avait déjà attribué à toute énergie une masse inerte, selon la formule générale $\frac{W}{c^2} = m$. Ici nous écrirons $\frac{E}{c^2} = \mu$, en appelant μ la masse *pesante* de l'énergie transmise, et nous dirons qu'au moment de son émission en M_h l'énergie E avait une masse pesante égale à $\frac{E}{c^2}$. Mais cette masse $\mu = \frac{E}{c^2}$ devait-elle bien posséder quand elle était dans le champ à la hauteur h un excès d'énergie, sous forme potentielle, égal à $\frac{E}{c^2}\gamma h$, ou à $\mu\gamma h$? Oui, car, partant du repos et tombant, dans un champ d'intensité γ, d'une hauteur h, une masse pesante quelconque, m, acquiert une énergie cinétique, donc perd une énergie potentielle, égale à $m\gamma h$. En effet son énergie cinétique à la fin de la chute sera $\frac{1}{2}\,mv^2$, v étant sa vitesse terminale. Or, le mouvement étant uniformément accéléré, on a

$$v = \gamma t\,; \qquad \text{d'où} \qquad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\gamma^2 t^2.$$

Mais on a aussi

$$h = \frac{1}{2}\gamma t^2\,; \qquad \text{d'où} \qquad t^2 = \frac{2h}{\gamma}\,;$$

d'où enfin

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\gamma^2\frac{2h}{\gamma} = m\gamma h.$$

Ainsi *le principe d'équivalence conduit à dire que l'énergie rayonnante est pesante dans la même proportion qu'elle est inerte* ; et rien n'empêche d'en dire autant de toute forme d'énergie. Corrélativement on est conduit à admettre qu'un corps matériel voit sa masse pesante varier avec son énergie interne dans la même mesure où varie sa masse inerte.

C'était une question douteuse d'après les seuls postulats de la théorie restreinte que la pesanteur de l'énergie ; par ailleurs il était bien peu satisfaisant, et sans doute incompatible avec l'ensemble des expériences mécaniques, d'attribuer à la masse pesante une valeur constante alors qu'on proclamait la dépendance de la masse inerte de tout corps par rapport à son énergie interne. Or voici que le doute est levé et que l'anomalie disparaît du fait du principe d'équivalence, qui impose aux deux masses les mêmes variations [1]. Einstein voit dans cette conséquence de son hypothèse de l'équivalence un progrès théorique important qui lui donne pleine confiance en la valeur de cette hypothèse : aussi va-t-il hardiment et sans tarder en déduire de nouveaux corollaires.

75. L'effet Doppler de gravitation. — Toute déformation d'un phénomène lumineux dû à une translation accélérée commune de la Source et du Récepteur devait d'après le principe d'équivalence avoir son analogue dans le cas d'une source et d'un récepteur au repos en deux points d'un champ de gravitation, pourvu que le trajet séparant ces deux points ait au moins une composante parallèle aux forces du champ.

Or une translation accélérée commune d'une source et d'un récepteur donne lieu à un effet Doppler, qui se manifeste au spectroscope par un déplacement de raies ; corrélativement il

---

[1] Nous avons dit plus haut (nº 41, note 2) que P. Langevin avait déduit du résultat des expériences d'Eotvös ce parallélisme constant des variations des deux masses.

devait y avoir un effet Doppler observable du fait du champ de gravitation auquel l'accélération commune est équivalente [1].

Pour calculer cet effet revenons à nos deux systèmes S et S′, S système d'inertie dans le champ — γ, S′ système d'accélération + γ en l'absence de champ, et convenons toujours de négliger les variations proprement relativistes dss grandeurs.

Nous supposons dans chacun de nos deux systèmes une source, L ou L′, placée à l'origine, et un récepteur, R ou R′, placé à une distance $oz = h$ (fig. 11 et 11′). Partant de ce qui nous est connu nous allons calculer d'abord l'effet Doppler dû à l'accélération de S′.

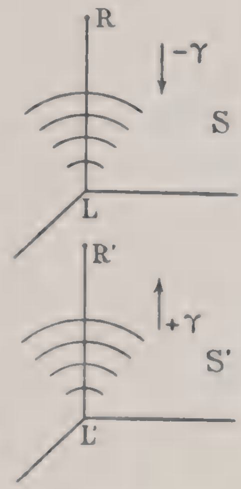

Fig. 11 et 11′.

Référons-nous encore à un système d'inertie S_0 par rapport auquel la vitesse de S′, donc aussi de L′, était nulle au moment de l'émission par L′ d'une radiation de fréquence ν_0'. Par rapport à ce même système la vitesse de L′, comme celle de R′, est au moment de la réception $v = \frac{\gamma h}{c}$, et c'est une vitesse radiale d'*éloignement* du récepteur par rapport au système d'inertie où la source se trouvait lors de l'émission. Or d'après la théorie relativiste la fréquence de réception ν_1' est dans ce cas, en fonction de la fréquence d'émission ν_0'

$$\nu_1' = \nu_0' \cdot \frac{1 - \beta}{\alpha},$$

ou, puisque nous nous en tenons au premier ordre,

$$\nu_1' = \nu_0'(1 - \beta).$$

Si au lieu des fréquences on considère les périodes τ_0' et τ_1', on a

$$\tau_1' = \frac{\tau_0'}{1 - \beta}.$$

Ici, β étant égal à $\frac{\gamma h}{c^2}$, nous avons donc

$$\tau_1' = \frac{\tau_0'}{1 - \frac{\gamma h}{c^2}}.$$

(1) *Ibid.*, p. 76-77.

Notre récepteur attribuera à la lumière venant de L′ une période accrue ; si c'est un spectroscope, la radiation reçue sera déplacée vers le rouge par rapport à une radiation de même nom émise et reçue dans l'appareil lui-même ; et le fait s'interprètera comme une *déformation du phénomène dû au mouvement du récepteur.*

Appliquons maintenant le principe d'équivalence, c'est-à-dire transposons le résultat que nous venons d'obtenir du système S′ au système S, ou plus exactement de L′ et R′ qui étaient emportés dans un mouvement d'accélération $+\gamma$ en dehors de tout champ, à L et R qui sont au repos en deux points du champ $-\gamma$: nous devrons observer au spectroscope en R le même déplacement que tout à l'heure, c'est-à-dire que si τ_0 et τ_1 sont respectivement la période émise en R et la période reçue en R et émise en L nous aurons

$$\tau_1 = \frac{\tau_0}{1 - \frac{\gamma h}{c^2}}.$$

Mais il ne peut plus ici être question d'une déformation causée par le mouvement, puisque les deux corps L et R sont au repos relatif ; les durées de transmission du phénomène qui a marqué le début de la période en L et de celui qui en a marqué la fin ne peuvent présenter aucune différence. Donc si la période d'émission en L avait été la même que la période d'émission en R aucun décalage des raies n'aurait lieu : pour rendre compte du décalage déduit du principe d'équivalence, nous sommes conduits à dire que *la période d'émission en L*, égale à la période de réception en R, c'est-à-dire à τ_1, *fut réellement plus grande que la période d'émission en R*, c'est-à-dire que τ_0.

Appliquons la théorie au cas d'une radiation émise sur le soleil et reçue sur la Terre : dans l'espace intermédiaire le champ n'est pas constant et la différence des périodes devrait se calculer par intégration ; mais comme le champ décroit constamment de la source au récepteur, la lumière voyagera toujours en remontant le champ, comme dans notre exemple théorique, et la différence des périodes sera de même sens que dans cet exemple : *une radiation solaire de même nom qu'une certaine radiation terrestre* aura une période plus grande que celle-ci et *apparaîtra dans un spectroscope terrestre décalée vers le rouge.*

Pour distinguer ce déplacement de l'effet Doppler véritable,

qui suppose un mouvement relatif de la source et du récepteur, nous l'appellerons *effet Doppler de gravitation*, puisqu'il ressemble à l'effet Doppler mais qu'il a pour seule cause la différence des positions dans le champ de la source et du récepteur.

Dès 1911 Einstein se demandait si certains déplacements de raies du genre indiqué, déplacements déjà observés et qu'on avait cru pouvoir attribuer à d'autres causes, n'étaient pas dus à ce que nous venons d'appeler l'effet Doppler de gravitation : la question se retrouvant dans la théorie définitive d'Einstein, nous verrons plus loin ce qu'il en est.

76. Dépendance de la vitesse de la lumière par rapport au champ de gravitation. — Einstein aurait pu à la rigueur n'attribuer qu'aux périodes lumineuses cette dépendance par rapport au champ qui, toutes choses égales d'ailleurs, les rend plus longues par exemple sur le soleil que sur la terre. Cependant si c'est le champ qui est la cause de l'inégalité on ne voit pas pourquoi il ne modifierait pas dans le même rapport la durée de tous les phénomènes : *il était donc naturel d'admettre que sur le soleil par exemple les durées de tous les phénomènes étaient plus longues que les durées des phénomènes terrestres correspondants*, la dilatation ayant lieu dans le même rapport que pour les périodes lumineuses. Cette extension de l'influence du champ n'entraînait du reste aucune conséquence observable nouvelle ; car unités de temps et durées à mesurer étant dilatées en tout point du champ dans un même rapport les mesures locales demeuraient partout ce qu'elles étaient pour les classiques ; seule une comparaison à distance pouvait mettre en évidence l'inégalité de deux durées correspondantes, et en dehors de la spectroscopie des astres on ne voyait pas de moyen d'instituer une telle comparaison.

Mais une autre question se posait au sujet des longueurs. Que fallait-il penser de l'influence du champ sur les longueurs d'onde ? La question était liée à celle de l'influence du champ sur la vitesse de la lumière : si cette vitesse était supposée partout la même, les longueurs d'onde devaient être dilatées par le champ dans le même rapport que les périodes. Qu'exigeait donc sur ce point le déplacement des raies déduit du principe d'équivalence ? Simplement ceci que les longueurs d'onde parcourues dans le spectroscope soient proportionnelles aux périodes τ_0 et τ_1 ; mais non

pas que sur le soleil la longueur d'onde soit égale au produit de τ_1 par la vitesse c.

Le déplacement était donc compatible — pour ne retenir que les deux hypothèses les plus simples — soit avec une vitesse de la lumière indépendante du champ, ce qui donnait des longueurs d'onde partout proportionnelles aux périodes ; soit avec des longueurs d'onde indépendantes du champ, ce qui supposait un ralentissement de la vitesse de la lumière par le champ proportionnel à la dilatation des périodes : de cette façon en effet le produit λ de la période par la vitesse locale de la lumière était constant pour une radiation donnée :

$$\tau_1 \cdot c\left(1 - \frac{\gamma h}{c^2}\right)$$

étant égal par exemple à $\tau_0 \cdot c$ puisque

$$\tau_1 = \frac{\tau_0}{1 - \frac{\gamma h}{c^2}}.$$

C'est à cette dernière conclusion, qui fait dépendre du champ la vitesse de la lumière de telle sorte qu'elle soit plus petite là où le champ est plus intense, qu'Einstein s'arrêta [1]. Nous allons le voir en déduire une nouvelle conséquence susceptible d'être soumise au contrôle de l'expérience.

77. Courbure des rayons qui nous arrivent d'une étoile en frôlant le soleil. — La propagation *rectiligne* de la lumière dans une région donnée de l'espace suppose en général la *constance en grandeur de la vitesse* de propagation dans toute cette région ; et, sauf des cas particuliers, un changement de grandeur de cette vitesse entraîne une déviation des rayons lumineux. C'est ainsi qu'au passage d'un rayon de l'air dans l'eau il y a en raison de la différence des indices ralentissement brusque de la vitesse et par suite réfraction, sauf quand le rayon tombe normalement à la surface libre de l'eau. Au lieu d'un brusque changement d'indice on peut avoir affaire à une variation continue ; c'est ce qui arrive dans le cas de l'atmosphère gazeuse d'un astre, la densité décroissant d'une façon continue à mesure qu'on s'éloigne de l'astre. Alors au lieu d'une réfraction brusque tout rayon qui passe au-

[1] *Ibid.*, p. 78.

trement que sous l'incidence normale d'une couche à la suivante subit une incurvation. La figure 12 fait comprendre comment serait courbé un rayon lumineux qui, après avoir voyagé en V_1 dans le vide intersidéral et avant d'y rentrer en V_2, entrerait dans l'atmosphère d'un astre sous une incidence oblique : on a représenté trois couches de densités décroissantes à partir du centre ; à chaque passage le rayon s'incurve, d'abord en se rapprochant de la normale (points a, b, c) ensuite en s'en éloignant (points c', b', a') : le résultat est que la trajectoire présente une seule incurvation d'ensemble, dont la concavité est tournée vers l'astre. Si l'astre était par exemple le soleil, ce qui supposerait autour du soleil une atmosphère suffisamment réfringente, et si le rayon venait d'une étoile E pour être reçu en T, sur la Terre, l'observateur terrestre verrait l'étoile non pas dans la direction E où elle lui apparaîtrait quand le soleil se montre ailleurs dans le ciel, mais dans une direction E' l'éloignant du bord du soleil frôlé par le rayon ; position apparente qui serait déterminée par la direction de la dernière partie de la trajectoire, car nous situons toujours les sources dans le prolongement de la dernière partie du trajet des rayons qui nous en arrivent.

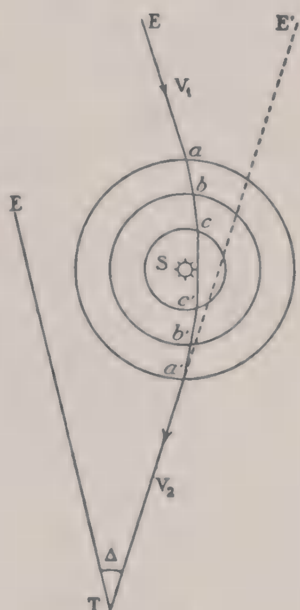

Fig. 12.

Dans notre supposition c'était la densité variable de l'atmosphère solaire qui produisait les variations de vitesse de la lumière ; mais si des variations de vitesse analogues sont produites par une autre cause, le résultat sera le même. Or d'après ce que nous avons dit plus haut le champ de gravitation est, au point de vue de son influence sur la vitesse de la lumière, tout à fait comparable à une atmosphère gazeuse de densité croissante à mesure qu'on se rapproche de l'astre : en effet, dans le vide, plus le champ est intense plus la vitesse est petite. La loi précise de variation n'est sans doute pas la même dans les deux cas, mais le sens général des variations est le même.

Par conséquent, d'après les idées d'Einstein que nous avons exposées, un rayon lumineux venant d'une étoile à la terre en

frôlant le soleil doit être incurvé dans le sens que nous avons dit et l'étoile doit apparaître à un observateur terrestre plus éloignée du soleil en direction qu'elle ne l'est en réalité. Einstein [1] déduit ce résultat directement de ses hypothèses, et raisonnant comme si le même vide régnait près du soleil que dans les espaces intersidéraux, il peut calculer l'angle $\Delta = \widehat{ETE'}$ dont doit paraître déplacée l'étoile. Si r désigne la distance minima par rapport au centre du soleil à laquelle passe le rayon, G la constante de la gravitation, c la vitesse de la lumière très loin de toute masse attirante et M la masse du soleil, la déviation Δ est égale en radians à $\frac{2GM}{c^2r}$. Pour un rayon frôlant le soleil, r est égal au rayon de l'astre ; alors Δ vaut les 83 centièmes d'une seconde d'arc.

Dès 1911 Einstein regardait une telle déviation comme susceptible d'être observée dans le cas d'une éclipse totale de soleil ; mais on n'a pas pu alors contrôler son hypothèse. Comme la théorie définitive d'Einstein entraîne une conséquence analogue nous dirons plus loin ce qu'il en est de la vérification expérimentale.

78. Première idée à retenir : les rapports observables entre certaines grandeurs localisables en divers points d'un champ de gravitation dépendent de ce champ. — Telle est la théorie ébauchée par Einstein en 1911, et telles sont les conséquences que dès cette époque il souhaitait qu'on soumît au contrôle de l'expérience. Cet ensemble, avons-nous dit, ne devait point être conservé tel quel ; cependant on y rencontre déjà deux idées qui devaient se retrouver — transposées et adaptées — dans la théorie définitive de la relativité, et qui à ce titre méritent d'être mises en relief.

La première est celle d'une influence du champ de gravitation sur les rapports que présentent dans nos observations certaines grandeurs physiques localisables en divers points du champ, quand nous est donné le moyen de les comparer à distance. Idée nouvelle, car dans le cas de corps au repos relatif les classiques n'avaient jamais admis d'autre altération de ces rapports que celle qui résultait d'une accélération commune de ces corps ; tandis que Einstein se fondant sur le principe d'équivalence attribue

[1] *Ibid.*, p. 79-80.

au champ, dans le cas de corps au repos dans un même système d'inertie, la même influence que les classiques eussent attribuée à une accélération commune de ces corps, équivalente au champ du point de vue cinématique.

Or une influence analogue se trouvera dans la théorie définitive. Disons tout de suite cependant que les deux sortes d'influence ne se ressembleront qu'en ce qui concerne les résultats observables : dans la théorie que nous venons d'exposer le déplacement des raies par exemple s'explique, nous l'avons vu, par une différence réelle des périodes suivant la position des sources dans le champ ; nous verrons que dans la théorie définitive ledit déplacement ne supposera aucune inégalité de ce genre ; mais qu'il résultera uniquement d'une différence de structure de l'Espace-Temps aux endroits où se trouvent les deux sources.

79. Deuxième idée à retenir : accélérations et champs de gravitation locaux sont choses relatives. — L'autre idée est que l'accélération du système de référence en l'absence de champ de gravitation et l'existence d'un champ en l'absence de toute accélération du système de référence sont, dans certaines conditions tout au moins, choses relatives.

Plaçons-nous au point de vue strictement classique et bornons-nous aux phénomènes mécaniques : en vertu de l'égalité des deux masses pesante et inerte et du fait que tout champ gravifique est un simple champ d'accélération, nous pouvons énoncer les théorèmes suivants :

I. — Dans un espace sans gravitation l'usage d'un système de référence d'inertie pour l'étude du mouvement d'un point matériel isolé rendrait manifeste l'absence de champ ; tandis que l'usage d'un système de référence d'accélération constante $+ \gamma$ *crée un champ fictif*, d'intensité $- \gamma$, et purement relatif au système adopté. Ce champ est d'ailleurs indiscernable d'un champ réel qui produirait des forces réelles égales aux forces d'inertie déterminées par l'accélération du système.

II. — Dans un champ de gravitation d'intensité $- \gamma$ l'usage d'un système d'inertie rendrait manifeste l'existence de ce champ ; mais l'usage d'un système de référence d'accélération $- \gamma$ — en particulier d'un système matériel qui cédant au champ y tombe en chute libre — *masque l'effet du champ*. Un tel système est ce

que nous avons appelé ailleurs un système *pseudo-inertique*, parce que par rapport à lui un point matériel qui n'est soumis à aucune force autre que les forces du champ obéit à la loi d'inertie, et que un point soumis, outre les forces du champ, à une force f prend une accélération $a = \frac{f}{m}$, exactement comme dans un système d'inertie.

Ainsi le simple usage d'un système de référence accéléré suffit soit à faire naître un champ apparent (1er cas) ; soit à masquer un champ réel (2e cas). Telle est du moins l'interprétation classique, d'après laquelle il y a une différence objective entre un champ et une accélération du système de référence.

Mais Einstein, conformément à l'esprit de sa théorie, se demande si cette interprétation s'impose. Les classiques, tout en reconnaissant l'équivalence des deux cas au point de vue mécanique, eussent opposé à l'idée d'une équivalence objective la différence des phénomènes é. m. et optiques dans les deux systèmes S et S′, l'effet Doppler par exemple devant bien d'après eux se produire dans le système accéléré S′, mais nullement dans le système S, malgré la présence du champ. Mais précisément Einstein a écarté cette objection en étendant à tous les phénomènes physiques le principe d'équivalence. Aussi insinue-t-il qu'on pourrait renoncer à l'interprétation classique, et regarder comme choses également relatives au choix du système de référence et le champ de gravitation et l'accélération du système, de telle sorte que l'observateur du système accéléré dans l'espace sans champ — au sens classique — pourrait dire aussi bien : je suis au repos, ou du moins ma vitesse est constante, mais il y a par rapport à moi un champ ; et que l'observateur du système qui au sens classique cède au champ pourrait dire aussi bien : je suis dans un système d'inertie et par rapport à moi il n'y a pas de champ.

Selon l'idée d'Einstein donc les observateurs de nos deux systèmes S et S′ pourraient l'un comme l'autre se prétendre au repos dans un système d'inertie, c'est-à-dire dépourvu d'accélération, comme l'exige le principe général de la relativité du mouvement.

Toutefois Einstein est obligé de reconnaître que *l'équivalence qui permettrait ainsi d'attribuer à volonté l'accélération relative des deux systèmes à l'un ou à l'autre n'existe que dans le cas d'un champ uniforme.* Considérons en effet le champ terrestre dans sa totalité : en deux points antipodes, au pôle Nord et au pôle Sud

par exemple, il est de sens opposés ; si donc le mouvement d'un système qui au pôle Sud est en chute libre supprime le champ dans cette région pour ce système, ce même mouvement doublera le champ pour le système au pôle Nord, où au champ réel s'ajoutera un champ relatif d'égale intensité et de même sens ; et ceci manifeste à l'encontre de la conception relativiste des accélérations et des champs le caractère absolu et du champ terrestre total et de l'accélération du système de référence.

Malgré tout Einstein retiendra ce double corollaire de l'égalité des deux masses inerte et pesante, à savoir que, *localement*, un champ relatif indiscernable d'un champ absolu peut résulter de l'accélération du système de référence ; ou que, *localement toujours*, une absence relative de champ, indiscernable de l'absence réelle, peut résulter de la chute libre du système de référence ; et il s'efforcera de bâtir sur ce fondement une théorie de la gravitation conforme au postulat général de la relativité, c'est-à-dire de l'égale validité de tous les systèmes de référence, même accélérés selon les classiques, pour l'énoncé de toutes les lois physiques.

Reste à savoir dans quelle mesure il y réussira, et comment cette idée s'alliera à celle d'une influence de la gravitation sur les rapports observables entre certaines grandeurs physiques. Nous allons essayer de le faire comprendre en exposant, quant à ses principes tout au moins, la théorie de la relativité générale.

Article X

LE PRINCIPE GÉNÉRAL DE RELATIVITÉ

80. Critique de l'idée de mouvement absolu. — Les principes de la théorie de la relativité générale ont été exposés pour la première fois par Einstein dans le Mémoire de 1916 [1] ; et ce Mémoire commence par une critique de l'idée de mouvement absolu. Considérons, dit Einstein, deux masses fluides A_1 et A_2 de même composition et de volumes égaux, très éloignées l'une de l'autre et très éloignées aussi de toutes les autres masses, de sorte qu'il ne s'exerce dans chacune que des actions gravifiques intérieures.

[1] *Les Fondements de la théorie de la relativité générale*, trad. Solovine, p. 7-71.

Supposons que les parties de chacune des deux masses soient au repos relatif, mais que A_1 et A_2 tournent l'*une par rapport à l'autre* d'un mouvement uniforme autour d'un axe passant par leurs centres de figure. Etudiant la forme des deux masses, on constate par des mesures faites sur place que A_1 par exemple est une sphère, tandis que A_2 est un ellipsoïde de révolution aplati dans le sens de l'axe autour duquel se fait la rotation relative (fig. 13).

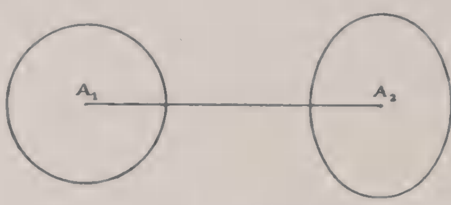

Fig. 13.

Comment expliquer cette différence de forme ?

La mécanique classique n'est pas embarrassée : elle répond que si la masse A_1 est une sphère c'est parce qu'elle est au repos par rapport à un certain espace privilégié où se vérifient les lois de la dynamique ; et que si la masse A_2 est un ellipsoïde c'est parce qu'elle tourne par rapport à cet espace, ce qui donne lieu à des *forces centrifuges* et rend compte de l'aplatissement.

La réponse, on le voit, comporte une interprétation exclusive de la rotation relative des deux masses. Mais, dit Einstein, que vaut cette explication ? Rien, pour la raison qu'elle invoque une cause inobservable et par là purement fictive, la rotation par rapport à un espace vide. Or, continue-t-il, *ne sont recevables en physique que les explications par des causes observables.*

Il y a une façon meilleure de rendre compte de la différence de comportement des deux masses : c'est de dire avec Mach que la première masse est immobile *par rapport à l'ensemble des autres masses du monde*, tandis que la seconde tourne par rapport à cet ensemble. Ici encore la rotation relative est attribuée exclusivement à l'une des deux masses ; mais ce n'est plus une rotation inobservable par rapport à un espace vide, c'est une rotation en principe observable par rapport à d'autres masses, fussent-elles extrêmement éloignées.

Que deviennent dans cette conception les lois de la mécanique ? Au lieu d'être définies par rapport à un espace privilégié, et applicables dans cet espace à des corps isolés, il faut les définir par rapport à l'ensemble des masses existantes et les appliquer seulement aux relations de chacune avec toutes les autres, en particulier aux mouvements relatifs de chacune par rapport aux

autres. C'est ainsi que l'aplatissement du corps A_2 devra résulter des lois fondamentales et de la rotation de ce corps par rapport à l'ensemble des autres masses.

Les lois d'une telle mécanique ne devront donc jamais faire intervenir que des *mouvements relatifs* ; mais ceci entraîne une conséquence : si quelque système de référence apparaissait comme privilégié quant à l'applicabilité des lois fondamentales, les mouvements des corps par rapport à ce système devraient être qualifiés de réels ou d'absolus, car dans des systèmes de référence liés à ces corps les lois ne se vérifieraient pas telles quelles, étant donné le privilège du premier système ; et la seule explication de leur non-participation au privilège serait qu'ils se meuvent réellement par rapport au système privilégié, celui-ci seul étant fixe, et que leur mouvement complique les phénomènes : et l'on retomberait ainsi dans l'erreur classique. La nécessité d'explications réelles, c'est-à-dire reposant sur des phénomènes observables, exclut donc tout système privilégié, et entraîne ce corollaire, qui n'est que l'extension du postulat de la relativité, à savoir que *les lois de la physique doivent « avoir un aspect tel qu'elles restent valables par rapport à des systèmes de référence se mouvant d'une façon quelconque.* » [1]

81. Critique de la notion de système de référence accéléré. — Einstein vient donc de postuler l'équivalence de tous les systèmes de référence — systèmes accélérés aussi bien que systèmes d'inertie — quant à l'applicabilité des lois physiques véritables. Mais cet énoncé soulève immédiatement une difficulté du point de vue de la doctrine relativiste antérieure : il suppose que l'on peut encore de ce point de vue conserver la notion de système de référence accéléré aussi bien que celle de système d'inertie ; or nous allons voir que cela n'est pas.

Considérons, comme Einstein nous y invite, un disque animé par rapport à un système d'inertie S d'une rotation uniforme dans son plan autour d'un axe passant par son centre. Par hypothèse le disque est indéformable, tout au moins du point de vue du système S où son centre est fixe : sans cela on ne pourrait pas lui attribuer un mouvement de rotation d'ensemble par rapport à

---

[1] Einstein : *Fondements de la théorie générale...* trad. Solovine, p. 10.

ce système. Nous supposons de plus que le disque porte en ses différents points des horloges de même fabrication et de même cadence, destinées à marquer le temps, chacune à l'endroit où elle est fixée.

D'après la théorie relativiste, pour qu'un tel disque puisse servir de système de référence il faut avant tout que les observateurs du disque soient en mesure de définir un temps valable pour toute son étendue ; c'est là une condition nécessaire pour que le disque se révèle indéformable à leurs propres yeux, c'est-à-dire pour que si deux quelconques de ses points étaient séparés par une distance donnée à un premier instant valable pour eux deux, ils puissent apparaître encore à la même distance à tout autre instant valable aussi pour eux deux ; c'est encore à cette condition seulement que les observateurs du disque pourront évaluer les durées des différentes phases du mouvement d'un point matériel, quelles que soient les positions sur le disque des petits trajets correspondants, et définir par rapport à leur système le mouvement du point.

Or cette définition d'un temps valable pour tout le disque est, aux termes de la théorie relativiste, impossible. Supposons en effet que nos observateurs veuillent régler par des opérations intérieures à leur système toutes leurs horloges sur l'une d'entre elles, condition préalable de leur utilisation pour définir un temps valable partout sur le disque. La théorie ne prévoit qu'une façon de régler les horloges, c'est-à-dire de définir la simultanéité en deux points éloignés ; c'est le réglage par signaux optiques. Mais ce mode de réglage suppose connue la vitesse de propagation de la lumière, dont on ne sait qu'une chose : c'est que pour une source et un récepteur liés à un *même* système d'inertie cette vitesse a la même valeur c dans toutes les directions. Or le disque n'est pas un système d'inertie : on pourrait bien y régler par signaux optiques deux horloges très voisines situées sur une même circonférence centrée sur le pivot du disque, leurs vitesses par rapport au système S étant les mêmes à très peu près ; ou encore deux horloges même éloignées situées sur un même rayon, leur vitesse étant transversale par rapport aux trajets des signaux échangés et ne troublant pas la propagation de ces signaux. Mais si l'on prétendait par exemple régler de proche en proche les unes sur les autres trois horloges au moins, H_0, H_1, H_2, enfermant une aire,

l'opération n'aurait plus de sens parce qu'elle reviendrait nécessairement à comparer les indications d'horloges liées à des systèmes d'inertie différents pour l'ensemble desquels il n'y a pas de simultanéité commune ; et elle ne saurait aboutir à un réglage cohérent ; c'est-à-dire que si par exemple après avoir prétendu régler H_1 sur H_0, puis H_2 sur H_1, on voulait déduire par signaux optiques l'heure de H_0 de celle de H_2, on trouverait pour H_0 une autre heure que celle qu'elle marque en effet, ce que l'on peut démontrer directement.

Nous n'avons pas besoin d'en savoir davantage pour conclure qu'*un disque en rotation ne peut plus, du point de vue relativiste, être utilisé comme système de référence, tout au moins comme système de référence où des horloges de même marche puissent indiquer chacune à l'endroit où elle se trouve un temps valable dans tout le système.* Et la même conclusion s'imposerait à nous si nous considérions des systèmes animés de mouvements accélérés quelconques.

Que devient alors le postulat de l'égale aptitude de tous les systèmes de référence, accélérés ou non, pour la formulation des véritables lois physiques ? Il ne peut être conservé, évidemment, sous cette forme ; mais précisément Einstein va nous proposer un équivalent de la notion de système de référence qui sera admissible en physique relativiste, et qui permettra un énoncé correct cette fois du postulat de la relativité générale.

82. Substitution de coordonnées curvilignes aux coordonnées rectilignes dans l'étude du plan, et principe général de relativité en géométrie. — C'est par une analogie géométrique simple que nous allons nous préparer à comprendre la notion qu'Einstein entend substituer à celle de système de référence.

La géométrie a pour objet premier les relations générales entre les points de l'espace étudié, la géométrie plane les relations générales entre les points d'un plan — entendons par là des relations valables dans toute l'étendue de ce plan — et toujours ces relations sont ou supposent des rapports de *distances* comptées suivant des droites.

En géométrie analytique cartésienne les distances entre les points eux-mêmes sont généralement impliquées dans les relations de distances de ces points à des *axes rectilignes de coor-*

données. Ce sont ces distances des points des figures aux axes qui sont le seul objet d'étude immédiat ; mais toujours la distance entre deux points apparaît comme une donnée fondamentale, tellement que lorsqu'on veut rattacher la géométrie analytique à la théorie des groupes de transformation, les transformations consistant soit dans des déplacements de figures d'une région à l'autre de l'espace, soit dans des changements de coordonnées, *la distance de deux points quelconques joue le rôle capital de grandeur invariante du groupe*, c'est-à-dire qu'elle demeure la même en dépit de tout déplacement ou de tout changement d'axes, ce qui est évidemment nécessaire pour la comparaison des éléments des figures et l'étude de leurs rapports.

Soient par exemple dans un plan deux points P_1 et P_2 de coordonnées $x_1\, y_1$ et $x_2\, y_2$ en axes *rectangulaires* : le carré l^2 de leur distance a pour expression

$$l^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Si l'on rapporte les positions des deux points à des axes *obliques* $x'y'$ faisant entre eux un angle θ l'expression du carré de la distance devient

$$l^2 = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + 2(x'_2 - x'_1)(y'_2 - y'_1) \cos \theta\,;$$

mais la *grandeur* de la distance est toujours la même.

Nous venons de supposer dans les deux cas que les axes étaient rectilignes ; cette condition présente cet avantage d'entraîner entre les distances des points, élément primordial de la géométrie, et les différences de leurs coordonnées x et y ou x' et y' des relations simples et immédiates : dans le premier cas l nous apparaît en effet comme l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les différences $x_2 - x_1$ et $y_2 - y_1$ sont les côtés de l'angle droit ; dans le deuxième cas l nous apparaît encore comme le troisième côté d'un triangle dont les différences des coordonnées constituent les deux autres côtés.

Un tel avantage n'est-il pas indispensable ? Et si les coordonnées rectilignes sont seules à le procurer ne faut-il pas renoncer *a priori* à l'emploi de coordonnées non rectilignes ? Nullement et *l'on peut se proposer d'étudier la géométrie du plan au moyen de coordonnées curvilignes quelconques.*

Considérons deux systèmes de lignes courbes, u et v, tracées

sur le plan, et telles que dans chaque système aucune ligne n'en coupe une autre du même système, mais qu'en revanche toute ligne rencontre successivement toutes celles de l'autre système. Chaque point de rencontre est un point du plan, et si nos lignes u sont toutes numérotées dans un ordre donné, ainsi que toutes nos lignes v, chacun de ces points de rencontre sera désigné sans ambiguïté par les numéros des deux lignes qui s'y coupent. Inversement en chacun des points du plan on peut faire se rencontrer une ligne u et une ligne v, quitte à intercaler pour cela entre les lignes d'abord tracées d'autres lignes satisfaisant toujours aux conditions que nous avons dites. De cette façon à chacun des couples de numéros affectant les lettres u et v correspondra un point du plan et un seul ; comme à chacun des points du plan correspondra un couple de ces numéros et un seul. S'il s'agissait de points de l'espace, trois familles de surfaces courbes quelconques, mais satisfaisant à des conditions analogues en ce qui concerne leurs intersections, permettraient de faire correspondre à tout point de l'espace un groupe de trois numéros, et inversement.

Ces groupes de deux ou trois numéros sont des coordonnées curvilignes, dans ce que cette notion a de plus général. On voit que le nombre de ces coordonnées est égal dans chaque cas à celui des coordonnées rectilignes, lui-même égal au nombre des dimensions de l'espace étudié.

Quel parti peut-on tirer de telles coordonnées ? — Dans le plan par exemple, *on pourra repérer sans ambiguïté deux points* quelconques au moyen de deux couples de coordonnées u et v. Nos deux points P_1 et P_2 auront pour coordonnées respectivement u_1v_1 et u_2v_2 (fig. 14). Mais est-ce que les différences $u_2 - u_1$, et $v_2 - v_1$, de leurs coordonnées de même nom vont encore exprimer leur *distance* ? Directement, non ; il n'y a pas de relation évidente, en général, entre une distance, toujours rectiligne sur un plan, et des différences de coordonnées curvilignes : la figure P_1P_2Q par exemple, où $\overline{P_1P_2}$ est la distance des deux points, est un triangle mixtiligne dont nous ne savons rien immédiatement.

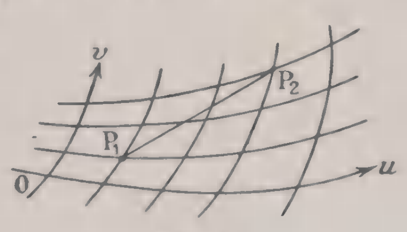

Fig. 14.

Alors va-t-on prétendre faire la géométrie du plan en abandonnant toute idée de distance rectiligne et en raisonnant uniquement sur des différences de coordonnées curvilignes ? C'est impossible, puisque les relations de distance entre les points sont l'objet essentiel de toute géométrie. Aussi devra-t-on toujours quand on emploiera ces nouvelles coordonnées se référer, au moins dans tout domaine infinitésimal, à des coordonnées et à des distances rectilignes, et nous indiquerons plus loin comment cela peut se faire. Mais pour l'instant, nous souvenant de ce que nous attendons de notre analogie géométrique, nous ne voulons mettre en évidence qu'une seule chose ; c'est que la géométrie du plan, à supposer que nous l'ayons étudiée en repérant nos points à l'aide de coordonnées curvilignes quelconques, nous apparaîtra la même qu'en fonction des coordonnées rectilignes.

Tant qu'il s'agit de lois qui consistent explicitement en relations de distance, la chose est évidente *a priori*, étant donnée l'invariance de la distance comme grandeur. S'il s'agissait au contraire de lois concernant la direction, leur indépendance par rapport au choix des coordonnées même curvilignes devrait se démontrer ; et ce serait le cas par exemple de cette propriété de la droite d'être une ligne de direction constante. Contentons-nous d'affirmer que dans les cas de ce genre la démonstration est possible ; que si par exemple l'équation de la droite change de forme quand on passe de coordonnées rectilignes à des coordonnées curvilignes, les relations qui expriment la constance de sa direction, et qui consistent dans l'annulation d'une certaine dérivée, sont vraies indépendamment du choix des coordonnées, ou comme on dit encore sont *covariantes* par rapport à tout changement de coordonnées. Mais si nous laissons de côté la démonstration, nous pouvons bien chercher à saisir la raison profonde de ladite covariance ou d'une façon plus générale de l'indépendance par rapport au choix des coordonnées des lois de la géométrie plane. La réponse est que, *quelles que soient les coordonnées utilisées, c'est toujours la géométrie du plan qu'on étudie*, et que, dès lors qu'on l'étudie correctement, fût-ce par des procédés très différents, on doit toujours trouver les mêmes résultats. Autrement dit les propriétés des figures planes tiennent uniquement au fait qu'elles sont planes ; ce que l'on comprendra mieux par contraste si l'on considère sur quelque surface courbe l'ana-

logue d'une figure plane, par exemple un cercle tracé sur une sphère, les rayons de ce cercle étant des arcs de grands cercles issus du centre du cercle étudié : une telle figure manifeste immédiatement des propriétés différentes de celles du cercle ordinaire. De fait sur le plan, si C est la circonférence et d le diamètre, on a toujours le rapport $\frac{C}{d} = \pi$; sur la sphère la relation entre C et d dépendra de la grandeur du diamètre : s'il s'agit d'un grand cercle on aura, R étant le rayon de la sphère,

$$C = 2\pi R \qquad \text{et} \qquad d = \frac{2\pi R}{2} = \pi R$$

d'où le rapport $\frac{C}{d} = 2$, au lieu de π ; pour un cercle de plus petit diamètre on aura toujours un rapport compris entre 2 et π. On voit par là ce qu'il peut y avoir de propre à la géométrie du plan ; ce sont précisément les lois de cette géométrie qui se manifesteront toujours, même quand on aura étudié le plan avec des coordonnées curvilignes quelconques : elles appartiennent au plan comme tel ; elles sont dites *intrinsèques*, ou encore absolues.

Mais alors nous voici en possession d'un véritable principe de *relativité géométrique*, car cette indépendance de la géométrie du plan par rapport aux choix des coordonnées rappelle l'indépendance de certaines lois physiques par rapport au choix de certains systèmes de référence ; de plus ce principe est *général*, en ce sens qu'il n'affirme pas seulement l'équivalence de toutes les coordonnées rectilignes pour l'étude du plan, mais celle de toutes les coordonnées quelles qu'elles soient, même si, comme il arrive pour les coordonnées curvilignes, elles n'expriment pas immédiatement les distances des points.

Pour le moment notre analogie est poussée assez loin : elle va nous permettre de comprendre comment l'on peut sans faire appel à la notion de système de référence formuler le principe général de relativité physique.

83. Substitution de coordonnées quelconques d'Espace-Temps aux coordonnées d'espace pur et de temps pur pour l'étude des rapports entre les événements physiques. — Il y a correspondance entre les axes rectilignes de la géométrie analytique et les systèmes de référence de la physique. Comme la géométrie étudie les relations entre des *points* la physique étudie les relations

entre les *événements* ; tout événement par rapport à un système de référence donné a un lieu et une date, et s'il peut se passer n'importe où dans l'espace à trois dimensions, il a trois coordonnées d'espace, x, y, z, et une coordonnée de temps, t.

Les coordonnées rectilignes géométriques, avons-nous dit, reflètent immédiatement les distances entre les points, étant elles-mêmes les distances de ces points aux axes : ainsi dans le plan la différence $x_2 - x_1$ entre les abscisses des points P_1 et P_2 est elle-même une distance rectiligne suivant ox, celle des projections sur ox des points eux-mêmes, parallèlement à oy ; nous dirons que cette différence est une *distance en abscisse pure.* De même la différence $y_2 - y_1$ des ordonnées des deux points est elle-même la distance des projections des points sur oy parallèlement à ox : c'est une *distance en ordonnée pure.*

D'une manière analogue les coordonnées spatiales relatives aux systèmes de référence physiques reflètent immédiatement les distances entre les lieux d'événements simultanés, car leurs différences sont *de l'espace pur* ; les coordonnées temporelles reflètent de même les durées qui séparent les dates des événements ; n'étant elles-mêmes que les intervalles qui séparent ces dates de l'instant origine, leurs différences sont *du temps pur.*

Mais la géométrie peut utiliser aussi des coordonnées curvilignes ; et nous savons que ces coordonnées indiquent uniquement par elles-mêmes l'ordre de répartition des points et nullement leurs distances rectilignes mutuelles, ni même leurs distances à des axes rectilignes qu'on pourrait juxtaposer, dans le cas du plan par exemple, aux courbes u et v : c'est ainsi que dans la figure 15 les différences $u_2 - u_1$ et $v_2 - v_1$, des coordonnées curvilignes des points P_1 et P_2 n'ont aucun rapport évident avec les distances rectilignes de ces points aux axes ox ou oy, avec ce que nous avons appelé distances en abscisse ou en ordonnée pures. Pourtant à l'aide de ces coordonnées on pourrait étudier la géométrie du plan. Y aurait-il donc aussi en physique quelque façon d'étudier la répartition des événements qui corresponde à l'emploi des coordonnées géométriques curvilignes, comme les

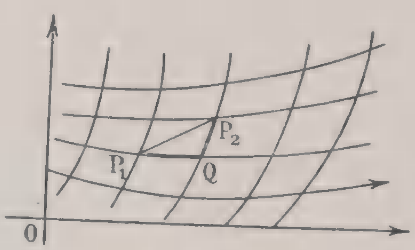

Fig. 15.

systèmes de référence correspondaient à l'emploi des coordonnées géométriques rectilignes ?

Oui, répond Einstein ; et c'est précisément ce procédé qu'il propose pour remplacer non seulement les systèmes de référence accélérés, qui n'ont plus de signification en physique relativiste, mais les systèmes d'inertie eux-mêmes, et pour formuler correctement son principe général de relativité.

Le procédé fera connaître l'ordre de répartition des événements à la fois et *inséparablement* dans l'Espace et dans le Temps, ou mieux dans *l'Espace-Temps* (1), mais sans faire intervenir nécessairement ni leurs distances spatiales pures ni leurs intervalles temporels purs ; c'est du reste par là que se trouvera écartée la difficulté inhérente aux systèmes relativistes accélérés, où le temps ne peut plus se définir.

Au lieu de nos deux coordonnées u et v pour situer les points du plan, nous aurons ici quatre coordonnées, car de même que les coordonnées géométriques curvilignes étaient en même nombre que les coordonnées rectilignes, de même les coordonnées des événements qui se situent à la fois dans l'espace à trois dimensions et dans le temps doivent être au nombre de quatre, comme dans les cas où l'on avait affaire à des systèmes de référence proprement dits.

Ces quatre coordonnées, qu'on désigne souvent par les symboles x_1, x_2, x_3, x_4, peuvent s'appeler coordonnées générales d'E. T., ou *coordonnées spatio-temporelles*.

Il semble dès lors qu'Einstein puisse formuler aisément son principe général : quelles que soient les coordonnées spatio-temporelles utilisées, dira-t-il, les lois de la Physique doivent toujours apparaître les mêmes.

Oui, mais à une condition, que nous révèle encore notre analogie géométrique : à savoir qu'il existe des lois de la répartition des événements valables partout et toujours, ou plutôt valables dans tout l'E. T. ; car c'est ainsi seulement que ces lois constitueront une réalité absolue, indépendante de la façon dont on l'étudie, comme les lois géométriques du plan sont valables dans tout le plan et constituent, pour l'esprit qui admet les no-

(1) Ce mot nouveau reviendra si souvent dans notre exposé que nous adoptons dès maintenant l'abréviation E. T. pour le désigner.

tions fondamentales et les axiomes d'Euclide, un objet abstrait indépendant des axes utilisés pour l'étudier.

C'est sur l'existence en physique de lois générales de ce genre et sur la condition fondamentale qu'elles supposent que nous devons insister maintenant.

84. L'Espace-Temps de Minkowski : géométrisation de la loi d'inertie. — *En géométrie constructive* les points d'une droite, d'un plan, de l'espace à trois dimensions, sont *conçus* par l'esprit avec les rapports de situation qu'impliquent les définitions générales ou qu'expriment les données du problème.

En physique les événements sont *connus par l'expérience* sensible en même temps que certaines de leurs relations, avant tout leurs relations de *coïncidence* spatio-temporelle. Mais on cherche à passer par induction de ces relations brutes primitives à d'autres relations plus profondes et plus complexes, que régissent précisément les lois générales de la physique.

Notre problème se précise donc ainsi : la répartition spatio-temporelle des événements physiques obéit-elle à des lois générales valables dans tout l'E. T. ?

A cette question Minkowski a répondu par l'affirmative, tout au moins en ce qui concerne l'E. M. et la Dynamique du point matériel. Nous n'avons pas à revenir sur les principes de la théorie des invariants, principes que nous avons exposés déjà (nº 58-59) du point de vue de la théorie restreinte ; mais nous avons à montrer ici comment cette théorie répondait d'avance aux exigences du principe général de relativité.

Tout s'y exprime, nous le savons, en langage spatio-temporel : non seulement les vecteurs d'espace de l'ancienne physique ont fait place à des quadrivecteurs d'E. T., mais encore et surtout il existe une grandeur spatio-temporelle qui est invariante par rapport à la transformation de Lorentz, l'*intervalle* d'E. T. s, dont le carré a pour expression

$$s^2 = l^2 - c^2d^2,$$

ou, en notation différentielle, l'intervalle ds, dont le carré a pour expression, par rapport à un système d'inertie et avec les coordonnées ordinaires :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2.$$

D'ailleurs dans cette expression de l'intervalle non seulement tous les termes ont les dimensions du carré d'une longueur, comme le veut le principe d'homogénéité ; mais la longueur *cd*, ou *cdt*, est liée à la durée *d*, ou *dt*, par un lien *naturel*, puisque *c* n'est pas une vitesse choisie arbitrairement, mais une vitesse invariante fondamentale, celle même qui a servi à définir le temps. Si bien que l'intervalle spatio-temporel *ds*, tout en impliquant le temps, ressemble de très près à la distance *dl* de l'espace, dont le carré a pour expression en coordonnées rectangulaires

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

La présence du quatrième terme dans le ds^2 tient à ce que l'E. T est à quatre dimensions ; le signe — devant c^2dt^2 tient au fait que la formule se déduit de la loi fondamentale de la propagation de la lumière :

$$cdt = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2};$$

mais à part ces deux différences les deux expressions sont analogues.

Dès lors nous voici en possession de tout ce qui est nécessaire pour constituer cette espèce de géométrie des événements que présuppose l'énoncé du principe de relativité, tout au moins une *géométrie du genre euclidien.* Que faut-il pour construire une telle géométrie ? Une multiplicité de points, qu'on appelle parfois un *continuum*, d'un nombre donné de dimensions ; puis *un groupe de transformation* et corrélativement une donnée invariante par rapport aux transformations du groupe : l'invariance ainsi définie en corrélation avec un groupe concernera toujours la distance, que nous savons déjà invariante en grandeur ; mais elle consistera en ce que l'expression même de cette distance — disons, pour répondre à tous les cas, de la distance élémentaire *dl* — *gardera la même forme quand on changera de repère*, c'est-à-dire de point origine et de direction origine, sans changer le genre des coordonnées ; quand par exemple on passera des axes rectangulaires ox, oy à d'autres axes rectangulaires $o'x', o'y'$; ou encore de coordonnées polaires ρ, θ ayant O pour centre et $O\xi$ pour origine des angles à d'autres coordonnées polaires ρ', θ' partant de O′ et de $O'\xi'$.

C'est alors en effet que la transformation est un *déplacement*

euclidien, qui consiste en une translation de l'origine jointe à une rotation commune des axes ; et que les formules de transformation présentent ce caractère essentiel d'exprimer le groupe par rapport auquel est invariante *la forme* de la distance dl, ou plutôt de son carré :

$$dx'^2 + dy'^2 = dx^2 + dy^2; \qquad \text{ou} \qquad d\rho'^2 + \rho'^2 d\theta'^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2.$$

Si au contraire, changeant ou non de repère, on avait changé le genre des coordonnées, passant par exemple de x et y à ρ et θ, le dl^2 aurait évidemment changé de forme.

Tels sont donc les éléments nécessaires de la constitution d'une géométrie euclidienne ; or tous ces éléments ont leurs analogues dans la physique de Minkowski : la multiplicité est celle des événements dans l'E. T. à quatre dimensions ; le groupe est dans tout petit domaine spatio-temporel celui de la transformation de Lorentz, et l'invariant du groupe est le carré de l'intervalle élémentaire, ds^2. Minkowski était donc en droit d'affirmer l'existence d'une sorte de géométrie des événements dont les lois ne sont que la traduction en langage d'E. T. de lois physiques de la théorie de la relativité restreinte. On appela cette géométrie *géométrie d'Univers*, parce qu'elle ne concerne pas seulement l'Espace ; mais le complexe Espace et Temps en quoi consiste pour Minkowski l'Univers physique objectif (1).

Mais dès qu'une géométrie (2) de ce genre existe, ses lois sont nécessairement indépendantes du choix des coordonnées d'E. T. utilisées pour décrire les relations entre les événements, comme les lois de la géométrie du plan par exemple sont indépendantes du choix des coordonnées, même curvilignes.

Et c'est ici le « grand progrès méthodologique » qu'au dire d'Einstein la théorie de la relativité doit à Minkowski (3). Avant ce mathématicien on savait que les lois relativistes fondamentales de l'E. M. et de la Dynamique du point matériel prenaient la même forme dans tous les systèmes d'inertie. Ce que grâce

(1) Minkowski : *Raum und Zeit*, Rel. Prinzip, p. 60.

(2) Le nom de *géométrie* se justifie du fait que l'invariant fondamental a les dimensions d'une longueur ; mais il ne faut pas oublier que dans l'expression de cet invariant figure le temps, multiplié par la vitesse c, et que les relations étudiées sont des relations cinématiques : en réalité la théorie est une *cinématique* exprimée sous forme géométrique.

(3) Einstein : *Quatre conférences*, trad. Solovine, p. 28.

à lui nous apprenons de nouveau c'est qu'à défaut de systèmes de référence accélérés, lesquels n'ont plus de sens du point de vue relativiste, ces mêmes lois sont absolument indépendantes du choix des coordonnées générales d'E. T. *Les lois de la relativité restreinte satisfont en ce sens aux exigences du principe général de relativité.*

Allons tout de suite cependant au devant d'une équivoque possible : les lois fondamentales de la théorie restreinte telles qu'Einstein les avait formulées avaient *la même forme* dans tous les systèmes d'inertie, mais parce qu'on employait dans tous ces systèmes un *même genre* de coordonnées — le temps et des coordonnées d'espace rectangulaires par exemple — ; dès lors les coordonnées elles-mêmes d'une même particule, x, y, z, t, x', y', z', t'..., étaient seules à changer quand on passait d'un système à un autre. En serait-il de même des lois exprimées en coordonnées spatio-temporelles quelconques ? — Nullement ; puisque par hypothèse les genres de coordonnées peuvent être différents ; de même qu'en géométrie l'équation d'une droite en coordonnées curvilignes a une forme autre et plus compliquée qu'en coordonnées rectilignes, tout en exprimant les mêmes propriétés essentielles de la droite — plus courte longueur et direction constante — ; de même ici les formules des lois devront changer et en général se compliquer quand on passera de coordonnées spatio-temporelles correspondant à l'emploi d'un système d'inertie à d'autres coordonnées spatio-temporelles quelconques — sans que pour autant le contenu essentiel de ces lois cesse d'être le même ; mais nous aurons à revenir sur ce point.

Pour le moment contentons-nous de donner un exemple simple de loi physique *géométrisée*, c'est-à-dire présentée comme une loi de la géométrie d'Univers. Soit un point matériel M qui se meut dans un plan : du point de vue classique nous pourrons représenter les lois de son mouvement au moyen d'un *diagramme* spatial à trois dimensions, deux d'entre elles étant les deux dimensions du plan, la troisième représentant le temps à une échelle arbitraire. A chaque passage du point M en tel point du plan et à tel instant correspondra un point du diagramme, et inversement. La suite des positions successives du mobile constituera dans le diagramme une *ligne* continue. Minkowski illustre sa théorie de l'E.T. à l'aide d'un diagramme analogue, lequel a l'avantage d'exclure

tout arbitraire dans le rapport entre l'unité de longueur et l'unité de temps, puisque ce rapport est ici nécessairement la vitesse c de la lumière. Mais peu importe : le mouvement d'un point mobile se représente encore par une suite de points du diagramme, image de la suite des événements intéressant le point mobile, et qui constituent ce que Minkowski appelle la *ligne d'Univers* de ce point.

Les éléments de cette ligne sont précisément des intervalles spatio-temporels infinitésimaux ds, comme les éléments d'une courbe sont des distances infinitésimales dl. Or on démontre que la ligne d'Univers d'un point matériel qui entre deux événements donnés a conservé toujours une vitesse rectiligne et uniforme est plus longue que la ligne d'Univers d'un point qui entre les deux mêmes événements aurait subi des accélérations : la démonstration est liée à celle que nous avons donnée concernant l'inégalité des durées qui pour les deux points matériels séparent les deux événements-limites (nº 65) : la durée de temps propre du mobile de vitesse constante, avons-nous dit, est plus longue que la durée de temps propre du mobile accéléré. Mais justement quand on parle des temps propres, c'est qu'on se réfère aux points mobiles eux-mêmes, et alors l'intervalle spatio-temporel $\int ds$ qui sépare les événements-limites s'identifie pour chacun avec son temps propre, puisque ces événements se passent pour chaque mobile au même point. Les lignes d'Univers, dont les longueurs entre deux événements donnés ont aussi pour expression $\int ds$, seront donc dans le même rapport que les temps propres, c'est-à-dire que *la ligne d'Univers du mobile de vitesse constante sera plus longue que celle du mobile accéléré*, quel qu'il soit. Mais quand un point conserve une vitesse r. et u. entre deux événements éloignés le concernant, c'est qu'il obéit à la loi d'inertie : donc la condition $\int ds =$ maximum n'exprime pas autre chose que la loi d'inertie. Pour exprimer cette loi en langage spatio-temporel on dira qu'*un point matériel qui n'est soumis à aucune force suit une ligne d'Univers de longueur maxima* ; et comme la variation d'une fonction s'annule quand la fonction passe par un minimum ou par un maximum on pourra formuler la loi $\delta \int ds = 0$. Voilà donc la loi d'inertie géométrisée. Mais d'après ce que nous avons dit elle doit être valable pour n'importe quelles coordonnées d'E. T.

Comment établirait-on cette propriété qui répond aux exigences du principe de relativité ? — De la même manière qu'en géométrie on établit l'indépendance des propriétés essentielles de la droite par rapport aux coordonnées utilisées. Mais nous retrouverons la question à l'article suivant, pour la reprendre à la lumière de notions nouvelles. Ce que nous voulions faire comprendre ici par notre exemple c'est comment l'on peut géométriser une loi physique et du même coup l'exprimer sous une forme valable pour toutes les coordonnées d'E. T.

85. Idée d'une géométrisation possible de la loi de gravitation. — Si le postulat général de relativité est un principe naturel, il doit s'appliquer à toutes les lois physiques. Il était assez facile de montrer, une fois établie la théorie générale des quadrivecteurs, que toutes les lois de l'E. M. pouvaient se formuler en langage spatio-temporel, et par suite d'une façon valable pour toutes les coordonnées d'E. T., conformément au postulat.

Toutefois ceci supposait que les phénomènes étudiés se produisaient dans un espace sans gravitation ; par ailleurs le problème de la gravitation elle-même était toujours au premier plan des préoccupations d'Einstein, qui souhaitait vivement le résoudre en accord avec le principe général de relativité.

Il était donc tout naturel qu'Einstein cherchât à géométriser la loi de gravitation, puisque par le fait même elle aurait alors une forme valable pour toutes les coordonnées d'E. T.

Voyons comment le problème, déjà abordé par Einstein dans son travail de 1911, se présentait de ce nouveau biais. L'identité des masses pesante et inerte suggérait un rapprochement entre gravitation et inertie, en ce sens que le champ gravifique était un simple champ d'accélération, c'est-à-dire imposait à toutes les masses, dans les mêmes conditions, des mouvements identiques, tout comme la loi d'inertie. Sans doute on avait l'habitude de dire qu'un point matériel obéissant à la loi d'inertie n'était soumis à aucune force, tandis qu'un point soumis à un champ gravifique subissait l'action des *forces du champ* ; mais il fallait reconnaître que dans le second cas on ne se trouvait pas en présence d'une de ces forces authentiques dont l'action présuppose une dépense corrélative d'énergie, force musculaire ou force électrique par exemple ; c'est pourquoi il était permis de se demander si

les forces du champ n'étaient pas de pseudo-forces, et si les mouvements de gravitation n'étaient pas assimilables au mouvement des points soumis à la loi d'inertie, la gravitation n'étant qu'une sorte de loi d'inertie généralisée dont le mouvement rectiligne et uniforme représentait l'effet le plus simple.

Si donc par ailleurs la loi de gravitation devait se géométriser afin de devenir indépendante du choix des coordonnées d'E.T. il fallait prévoir une géométrie d'Univers à laquelle se rattacheraient les mouvements de gravitation comme déjà les mouvements d'inertie se rattachaient à la géométrie d'Univers de Minkowski. Mais cette géométrie d'Univers serait sûrement moins simple que celle de Minkowski. En effet, celle-ci faisait suivre aux points matériels libres des lignes d'Univers rectilignes, analogues des droites de l'espace, et liées à la structure de l'E.T. de Minkoswki comme les droites à la structure de l'espace ordinaire ; pour généraliser la loi d'inertie il faudrait faire suivre aux points libres des lignes d'Univers liées elles aussi à la structure de l'E.T. ; mais les mouvements de gravitation étant plus compliqués que les mouvements d'inertie cette structure du nouvel E.T. serait elle-même plus compliquée que celle de l'E.T. de Minkowski.

Heureusement la solution du problème se trouvait préparée, sur le terrain purement mathématique tout au moins, par les créateurs des géométries non-euclidiennes : la géométrie d'Univers correspondant aux mouvements de gravitation serait sans doute une sorte de géométrie non-euclidienne à quatre dimensions.

Nous réservons pour l'article suivant l'exposé des principes de cette géométrie, mais nous pouvons montrer tout de suite que l'idée d'une géométrie d'Univers non-euclidienne n'avait rien qui puisse *a priori* arrêter Einstein.

Plus que jamais dans l'hypothèse d'une telle géométrie l'usage de coordonnées spatio-temporelles apparaissait nécessaire ; car de même que sur une surface courbe on ne peut pas tracer des axes rectilignes d'une grande étendue, de même dans un E.T. non-euclidien — ou « courbe » — on ne pourrait pas adopter pour des régions un peu considérables des systèmes de référence dans toute l'étendue desquels on puisse définir séparément les distances et les durées, c'est-à-dire des systèmes d'inertie : mais il importait peu que le recours à des coordonnées générales d'E.T. fût ainsi exigé par une raison nouvelle, puisque de toute façon il s'imposait

du seul fait que la théorie n'admettait plus de systèmes de référence accélérés.

Une géométrie d'Univers non-euclidienne faisait prévoir une difficulté d'un autre ordre : sur une surface courbe les rapports mesurables entre les longueurs, éléments des figures, ne sont plus les mêmes que sur un plan, nous l'avons expliqué à propos des cercles tracés sur une sphère. Encore, dans le cas d'une sphère ces rapports sont-ils les mêmes à partir de chaque point, parce que la courbure est constante ; mais dans le cas d'un ellipsoïde par exemple, les rapports en question varieraient en général, toutes choses égales d'ailleurs, d'une région à l'autre. Il fallait s'attendre à quelque chose d'analogue dans l'E.T., surtout s'il devait présenter une courbure variable, ce qui, étant donnée la complication du champ gravifique, était certain d'avance. Les rapports observables entre des grandeurs physiques localisables en divers points de l'E. T. dépendraient sans doute de la courbure de l'E.T. en ces points : était-ce admissible ? Ce ne l'était pas moins que cet effet Doppler de gravitation qu'Einstein avait déduit de son principe d'équivalence et qui, en l'absence de tout mouvement relatif de la source et du récepteur, résultait de la seule différence de position des deux corps dans le champ.

Bref les réflexions antérieures d'Einstein l'avaient préparé aux complications éventuelles de l'hypothèse d'un E.T. courbe : par suite rien ne l'empêchait d'essayer de donner corps à l'idée d'une géométrie d'Univers répondant aux phénomènes de gravitation.

86. Le principe général de relativité en physique : nécessité de lois covariantes par rapport à un changement quelconque des coordonnées d'E.T. — A supposer qu'on ait pu géométriser et mettre par le fait même sous une forme indépendante des coordonnées d'E.T. la loi de gravitation, on n'aurait pas encore une physique relativiste complète, car il y a d'autres lois que celle de gravitation, celles de l'E. M. en particulier, qu'il s'agirait d'après la nouvelle conception de déduire d'une structure de l'E.T., au lieu de les considérer simplement comme induites de l'expérience ; et peut-être d'autres lois encore, spéciales au domaine atomique ; et bien entendu ces lois devraient s'harmoniser entre elles : en somme l'application du principe de relativité à toute la physique supposerait qu'on ait su déterminer une structure géométrique

de l'E.T. assez complexe pour embrasser sans qu'elles se gênent mutuellement les structures spéciales correspondant aux divers domaines de la physique. La tâche est sûrement malaisée ; mais admettons qu'elle soit possible : nous pouvons alors formuler comme il suit, avec Einstein, le principe général de relativité : *les lois générales de la nature doivent être exprimées par des équations qui soient valables pour tous les systèmes de coordonnées spatio-temporelles* ; ou encore qui soient *covariantes* vis-à-vis de substitutions quelconques concernant ces coordonnées [1].

Article XI

L'ASPECT GÉOMÉTRIQUE DU PROBLÈME DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

87. Induction et construction dans la découverte d'une géométrie d'Univers. — Supposons que conformément à l'hypothèse générale d'une géométrie d'Univers on cherche à déterminer la structure de l'E.T. qui correspond à telle loi générale de la physique : comment devra-t-on s'y prendre pour découvrir cette structure ?

Tout dépend des données du problème : s'il s'agit de lois déjà connues par la physique classique ou relativiste et qu'on regarde comme rigoureusement vraies, on n'aura qu'à exprimer ces lois en langage d'E.T., comme nous l'avons fait pour la loi d'inertie.

Si l'on juge au contraire qu'on connaissait mal, ou d'une façon seulement approchée, la loi du domaine considéré, il s'agira de découvrir la forme véritable et rigoureuse de la loi : ce sera le cas en particulier de la loi de gravitation d'Einstein, loi qui selon lui diffère de la loi classique. Pour la découvrir, on partira des postulats de la théorie — validité de la théorie restreinte dans les systèmes d'inertie, fussent-ils réduits à n'être définis chacun qu'en un domaine infinitésimal de l'E.T., hypothèse d'une géométrie correspondant aux mouvements gravifiques, et nécessité d'une expression covariante de la loi — ; on partira en même temps des exigences de la loi de Newton, considérée comme vérifiée, tout au

[1] Einstein : *Fondements de la théorie générale*. Trad. Solovine, p. 15.

moins en première approximation, quant à ses résultats ; et il faudra trouver une loi qui réponde à cet ensemble de conditions. Quelle méthode suivra-t-on ? Deux méthodes conjuguées comme toujours en physique théorique : la « déduction », ou plutôt la construction mathématique, pour découvrir les lois covariantes *possibles* relatives à la répartition des événements dans un E. T. donné, ou encore dans des E. T. d'un même nombre de dimensions donné mais de structures différentes ; l'induction, avec ce qu'elle implique de risque dans les hypothèses et de rigueur dans le contrôle, pour choisir parmi ces lois possibles celles qui répondent au problème *réel.*

Mais tout ceci demande à être précisé : dans tout cet article nous allons nous attacher à faire comprendre dans son principe le procédé géométrique qui a révélé à Einstein la forme générale des lois covariantes de la distribution des événements ; et c'est seulement dans l'article suivant que nous dirons comment a pu s'opérer parmi ces lois possibles le discernement de la nouvelle loi de gravitation.

88. Géométrie intrinsèque des surfaces courbes : les coordonnées générales et le dl^2 : Gauss, 1827. — Aux termes de la géométrie ordinaire une surface est un lieu géométrique de l'espace à trois dimensions, un ensemble de points de l'espace dont les positions sont soumises à des conditions restrictives ; par exemple un plan ou la surface d'une sphère.

De ce point de vue on peut opposer surface courbe à surface plane comme on oppose dans le plan ligne courbe à ligne droite : la tangente à une courbe plane change de direction dans le plan d'un point à un autre de la courbe ; de même le plan tangent à une surface courbe change d'orientation dans l'espace d'un point à un autre de la surface.

En définissant ainsi la courbure on se réfère à des données extérieures à la surface, par exemple au centre de la sphère pour une surface sphérique. La courbure suivant une direction donnée est ici l'inverse $\frac{1}{R}$ du rayon R de la sphère ; elle est constante d'un point à un autre et, autour d'un même point, la même dans toutes les directions. Dans le cas général la courbure en un point varie suivant la direction considérée, et même suivant une même direc-

tion elle change d'un point à un autre ; c'est ce qui est manifeste par exemple sur un ellipsoïde. Comment la définit-on alors ? En tout point il y a une normale à la surface et tous les plans contenant cette normale sont des plans normaux ; or toujours dans l'un d'entre eux la courbure est minima, le rayon de courbure correspondant étant maximum, et dans un autre elle est maxima, le rayon de courbure correspondant étant minimum. Pour caractériser complètement la courbure de la surface au point considéré il suffit de connaître ces deux rayons, R_1 et R_2 ; ils permettent de définir la courbure moyenne

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

et la courbure totale $\frac{1}{R_1 R_2}$. Sur la sphère les deux rayons sont égaux ; la courbure moyenne est égale à $\frac{1}{R}$ et la courbure totale à $\frac{1}{R^2}$.

Ces notions classiques fournirent à Gauss, en 1827, le point de départ d'un travail fondamental sur l'étude des surfaces courbes [1]. Le grand géomètre allemand montre qu'on pourrait étudier analytiquement la courbure d'une surface en faisant abstraction de toute donnée extérieure à la surface elle-même ; qu'on pourrait en particulier *exprimer la courbure totale en chaque point en fonction d'éléments purement intrinsèques à la surface.*

Essayons de saisir le principe de la méthode de Gauss. Cette méthode présuppose essentiellement que la surface admet en chacun de ses points un plan tangent parfaitement déterminé, c'est-à-dire ne présente pas de points analogues au sommet d'un cône où il n'y a pas un plan tangent unique.

Cela admis, la première chose à faire est de définir la *distance* entre deux points, car c'est toujours là l'élément fondamental. Ici il s'agit de la distance comptée sur la surface ; or en général deux points éloignés sur une surface courbe ne peuvent être joints par une droite, mais seulement par des courbes ; il faudra donc

---

(1) Le travail de Gauss, publié en latin sous le titre *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, a été traduit en français par E. Roger : *Recherches générales sur les surfaces courbes*, par M. C. F. Gauss, traduites en français. 2e éd. 1 vol. Paris 1870. C'est à cette traduction que nous allons nous référer.

choisir convenablement quelqu'une de ces courbes pour faire de sa longueur la distance des deux points ; mais la longueur d'une courbe n'est concevable que comme l'*intégrale de petits éléments rectilignes* joignant deux points aussi rapprochés qu'on veut sur la courbe ; c'est donc la distance rectiligne élémentaire, dl, qui sera l'élément premier de la construction, distance qui est absolument *invariante en grandeur*, comme dans la géométrie du plan, c'est-à-dire qu'on peut transporter d'un point à un autre, par la pensée, sans qu'elle change, comme il est nécessaire si l'on veut comparer entre eux les éléments des figures.

Cet élément dl, Gauss le considère en outre comme situé en chaque point de la surface dans le plan tangent en ce point, et il le soumet dans ce plan aux lois de la géométrie ordinaire, c'est-à-dire, du point de vue de la théorie des groupes, qu'il attribue à son carré dl^2 une forme invariante quand on change les coordonnées locales, tout en conservant leur genre, ainsi que nous l'avons expliqué déjà (nº 84).

Mais tout cela ne concerne que les divers points de la surface considérés isolément ; pour étudier la géométrie de la surface elle-même il faut pouvoir comparer ce qui se passe en tel point à ce qui se passe en tel autre ; et ceci suppose avant tout l'usage de coordonnées en fonction desquelles s'exprimera en tout point l'invariant dl^2.

De quelle nature seront ces coordonnées ? Il faudra, conformément à l'idée d'une étude intrinsèque de la surface, que les coordonnées soient tracées sur la surface elle-même. En général elles ne seront pas des droites ; ce seront des courbes quelconques, assujetties seulement aux mêmes conditions que les coordonnées curvilignes qu'on peut employer pour l'étude du plan (nº 82). Il suffira de deux familles de courbes. Gauss les appelle p et q ; on dit plus communément u et v ; deux lignes d'une même famille ne doivent pas se rencontrer ; toute ligne d'une famille doit couper toutes celles de l'autre famille. De cette façon à toute intersection d'une ligne u et d'une ligne v correspond un point de la surface et inversement. Les courbes étant supposées quelconques, Gauss appelait leurs numéros d'ordre des coordonnées « indéterminées » ; on les appelle maintenant *coordonnées de Gauss.*

Comment exprimer la distance élémentaire dl en fonction de telles coordonnées, dont les différences, même dans un petit

domaine, ne sont pas par elles-mêmes des longueurs, mais de simples nombres ? — Plaçons-nous en un point P de la surface, de coordonnées u et v ; considérons un très petit domaine autour de ce point, et dans ce domaine un autre point de la surface, P_1, de coordonnées $u + du$, $v + dv$.

Nous pourrions rapporter les positions de nos deux points à trois axes cartésiens rectangulaires de l'espace, ox, oy, oz ; alors les coordonnées de nos points seraient x, y, z pour P et pour P_1

$$x + \Delta x, \qquad y + \Delta y, \qquad z + \Delta z\,;$$

et le carré de leur distance *dans l'espace* aurait pour expression

$$dl^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2. \tag{1}$$

Pour connaître dl^2 en fonction de u et de v il faut que nous supposions connue la façon dont x, y et z dépendent de u et de v ; c'est légitime, car un point u,v étant donné, il a toujours trois coordonnées x, y, z dans l'espace. Nous pouvons donc considérer x, y et z comme des fonctions de u et de v :

$$x = f_1(u,v)\ ; \qquad y = f_2(u,v)\ ; \qquad z = f_3(u,v).$$

Ce sont ces relations qui vont nous permettre d'exprimer le dl^2 en fonction de u et de v : en effet les accroissements Δx, Δy, Δz ne sont autres, si l'on se borne aux parties principales, que les différentielles totales de x, y et z.

x étant fonction de u et de v, sa différentielle totale est

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv\,;$$

de même

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv \qquad \text{et} \qquad dz = \frac{\partial z}{\partial u}\,du + \frac{\partial z}{\partial v}\,dv.$$

Portons ces valeurs dans l'expression cartésienne du dl^2 ; nous obtenons, à des quantités négligeables près,

$$dl^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\,du + \frac{\partial z}{\partial v}\,dv\right)^2;$$

ou, en effectuant et en groupant les termes en du^2, $dudv$ et dv^2 :

$$\begin{aligned} dl^2 = & \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right] du^2 \\ & + 2\left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right] du\, dv \\ & + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right] dv^2. \end{aligned}$$

Gauss désigne par les lettres E, 2F et G les coefficients de du^2, $dudv$ et dv^2, et écrit le dl^2 sous la forme

$$dl^2 = \mathrm{E}du^2 + 2\,\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}dv^2. \tag{2}$$

Les trois coefficients E, F et G, qui bien entendu varient d'un point à un autre, c'est-à-dire dépendent de u et de v, peuvent être calculés ainsi pour des couples de valeurs quelconques de u et de v ; et ceci nous montre que E, F et G sont des fonctions de u et de v qui existent en tout point de la surface. Sans doute nous nous sommes rendu compte de leur existence par l'intermédiaire des coordonnées x, y, z de l'espace ; mais nous pouvons faire abstraction de cette origine, les considérer en eux-mêmes, c'est-à-dire comme des coefficients définis uniquement en fonction de u et v et affectant la surface en chacun de ses points dès qu'on l'étudie avec ces coordonnées u et v.

Toute la théorie de Gauss consiste à utiliser ces coefficients, qui figurent déjà dans l'expression de la distance dl pour étudier la géométrie de la surface.

Le dl^2 permet d'abord de définir la ligne de plus courte longueur qui joint sur la surface deux points éloignés. La longueur l d'une ligne quelconque joignant deux points A et B a pour expression générale

$$l = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} dl, \qquad \text{ou} \qquad l = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \sqrt{\mathrm{E}du^2 + 2\,\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}dv^2},$$

et cette longueur, égale à une somme d'éléments de longueur invariante, est elle-même une grandeur invariante ; il suffira d'écrire la condition pour que cette intégrale soit minima pour obtenir l'équation de la ligne de plus courte longueur. Si cette équation donne par exemple v en fonction de u, elle sera une équation différentielle du second ordre, où entreront, avec u, v et ses dé-

rivées première et seconde, et dont les coefficients dépendront de E, F, G et de leurs dérivées premières par rapport à u et à v [1].

Par analogie avec les lignes de plus courte longueur traçables sur la surface terrestre entre deux points donnés, lignes qui sont à très peu près des arcs de grand cercle, les lignes de plus courte longueur sur une surface quelconque s'appellent des *géodésiques* de la surface.

Les géodésiques une fois définies, on peut parler de figures tracées sur la surface et de rapports entre leurs éléments, en un mot de la géométrie de cette surface. Les éléments linéaires fondamentaux des figures seront des arcs de géodésiques ; ainsi sur une sphère un triangle aura des arcs de grands cercles pour côtés ; un cercle des arcs de grands cercles pour rayons, etc.

Mais surtout Gauss parvient à exprimer en fonction de E, F et G et de leurs dérivées premières et secondes par rapport à u et à v la *courbure totale* de la surface en chaque point [2] ; ce qui constitue l'un des théorèmes fondamentaux de la théorie.

Comment ces résultats répondent-ils à l'idée de géométrie intrinsèque ? — En ce qu'ils ne font intervenir que des éléments analytiques dont l'existence sur la surface elle-même est établie ou supposée. Mais alors, étant donnée une surface réelle, on devrait pouvoir déduire ces éléments de mesures directes effectuées sur cette surface ? — Oui ; et Gauss a précisément montré qu'il correspond à chacun d'eux une donnée géométrique perceptible ou mesurable, en principe tout au moins.

La *géodésique* entre deux points, ligne de plus courte longueur dont nous connaissons l'équation intrinsèque, est aussi la ligne qui entre ces deux points a par rapport à la surface elle-même, sinon par rapport à l'espace, une *direction constante.*

Pour la *courbure totale* en un point, Gauss établit qu'elle est égale au quotient de l'excès par rapport à π de la somme des angles d'un triangle infinitésimal tracé en ce point par l'aire de ce triangle, d'où l'équation

$$\frac{1}{R_1R_2} = \frac{A + B + C - \pi}{\sigma},$$

---

(1) Gauss : *Recherches générales sur les surfaces courbes*, XVIII, trad. Roger, p. 37.

(2) *Ibid.*, XI, p. 27.

où A, B et C sont les angles du triangle, et σ son aire (1).

Enfin Gauss donne l'interprétation géométrique des trois *coefficients* E, F et G (2) : soit (fig. 16) PQP_1R, un petit élément de la surface ; les coordonnées de P étant u et v, celles de P_1, $u + du$, $v + dv$ et dl étant la distance $\overline{PP_1}$. Il est toujours entendu que nous raisonnons comme si nos quatre points étaient dans le plan tangent à la surface en P par exemple.

Passons de P à Q, qui a même coordonnée v que P mais pour coordonnée u, $u + du$ au lieu de u. La distance $\overline{PQ}$ a pour valeur d'après la formule générale où nous faisons dv^2 et $dudv$ égaux à 0,

$$\overline{PQ} = \sqrt{Edu^2} = \sqrt{E}\, du\ ;$$

d'où nous voyons que $\sqrt{E}$ est le coefficient par lequel il faut multiplier, dans le petit domaine considéré, la différence du des

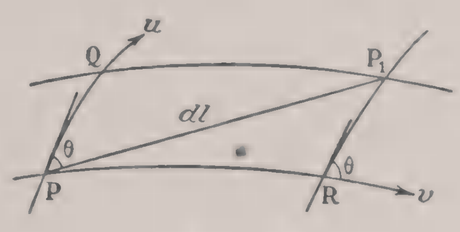

Fig. 16.

coordonnées u de deux points ayant même coordonnée v pour obtenir leur distance. Si du n'est qu'un nombre $\sqrt{E}$ devra avoir les dimensions d'une longueur, ou inversement, puisque le produit $\sqrt{E}\, du$ est une longueur.

Un raisonnement pareil nous montrerait que la distance $\overline{PR}$ est égale à $\sqrt{G}\, dv$ et que $\sqrt{G}$ est le coefficient par lequel il faut multiplier dans le petit domaine considéré la différence dv des

(1) On se rendra compte aisément de la validité de cette relation sur la sphère dans le cas d'un triangle ayant pour côtés trois quarts de grands cercles. Le triangle a ses trois angles droits ; l'excès sur π est donc $\frac{\pi}{2}$. L'aire du triangle est le 8e de la sphère, c'est-à-dire $\frac{4\pi R^2}{8}$ ou $\frac{\pi R^2}{2}$: la courbure totale est bien $\frac{\pi}{2} : \frac{\pi R^2}{2} = \frac{1}{R^2}$; la formule de Gauss s'applique ici à un triangle fini parce que la courbure est constante. Dans le cas du plan l'excès sur π est nul et la courbure aussi.

(2) *Ibid.*, XVII, p. 36.

coordonnées v de deux points ayant même coordonnée u pour obtenir leur distance.

Enfin pour savoir ce que représente F considérons le petit triangle PP_1R. Soit θ la valeur en P de l'angle des coordonnées ; cette même valeur, à des quantités du second ordre près, se retrouve en R point très voisin. Or dans ce triangle, dont les côtés sont $\overline{PP_1} = dl$, $\overline{PR} = \sqrt{G}dv$ et $\overline{RP_1} = \overline{PQ} = \sqrt{E}du$, nous avons d'après ce qui précède et d'après la géométrie

$$dl^2 = Edu^2 + Gdv^2 - 2\sqrt{E}\,du\,\sqrt{G}\,dv \cos(\pi - \theta) ;$$

$$\text{ou } dl^2 = Edu^2 + Gdv^2 + 2\sqrt{E}\,\sqrt{G}\,du\,dv \cos\theta.$$

ce qui nous montre, par comparaison avec la formule générale, que 2F est égal à $2\sqrt{E}\,\sqrt{G}\cos\theta$ (1).

On se rend mieux compte, grâce à cette interprétation géométrique des coefficients E, F et G, du caractère intrinsèque de l'expression du dl^2 et de toutes les relations qu'on en peut tirer.

Mais si cette formule et ces relations sont intrinsèques, elles

(1) Pour concrétiser cette interprétation dans un cas simple, supposons que la surface soit une sphère dont les points sont rapportés à des parallèles v et à des méridiens u. Alors nos deux points P et Q, de même coordonnée v, seront situés sur un même méridien ; leur distance est donc un arc de ce méridien ; la différence du de leurs coordonnées u sera par exemple leur différence de latitude, et le coefficient $\sqrt{E}$ sera une longueur égale au rayon de la sphère : $\sqrt{E} = R$, d'où $E = R^2$. Nos deux points P et R qui ont même coordonnée, u, seront situés au contraire sur un même parallèle ; la différence dv de leurs coordonnées v correspond à un angle au centre du cercle parallèle, et, l'arc de parallèle entre deux points très voisins ne différant pas, au premier ordre, de l'arc de grand cercle, la longueur par laquelle il faut multiplier dv pour obtenir la distance des deux points est le rayon du parallèle ; or le rayon d'un parallèle a pour valeur, en fonction du rayon R de la sphère et de la latitude λ du parallèle, $R\cos\lambda$; la latitude étant égale à $\frac{\pi}{2} - u$ si l'origine des u est au pôle, on a

$$R\cos\lambda = R\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = R\sin u ;$$

c'est ici le coefficient $\sqrt{G}$; d'où

$$G = R^2\sin^2 u.$$

Enfin sur notre sphère méridiens et parallèles se coupent toujours à angle droit ; si bien que $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\cos\theta = 0$ en tout point ; d'où $F = 0$.

Le dl^2 de notre sphère est donc

$$dl^2 = R^2\,du^2 + R^2\sin^2 u\,dv^2.$$

présentent aussi un autre caractère que nous avons plus d'intérêt encore à mettre en évidence : c'est que sous leur forme générale elles sont valables d'une part pour toutes les surfaces, et d'autre part pour tous les systèmes de coordonnées de Gauss utilisées pour l'étude de ces surfaces.

En effet pour les établir Gauss n'a rien supposé qui particularise le problème : la surface étudiée, pourvu qu'elle ait en tout point un plan tangent, est quelconque ; les coordonnées u et v sont quelconques aussi, de même que les fonctions qui les relient à x, y et z, ces fonctions étant seulement supposées dérivables. Bien entendu quand on se trouvera en présence d'une surface déterminée et d'un système déterminé de coordonnées u et v tracées sur cette surface — car il en faudra toujours un pour appliquer la théorie —, les variables et les coefficients de la formule générale du dl^2 prendront des valeurs particulières, et si l'on étudie successivement une même surface à l'aide de deux systèmes de coordonnées de Gauss, c'est par des différences entre les valeurs des variables et des coefficients que se traduira le changement de coordonnées. Mais toujours la même formule générale du dl^2, de même que les formules générales des géodésiques et de la courbure totale seront applicables : la courbure totale qui est un invariant aura même valeur avec toutes les coordonnées ; les équations des géodésiques en coordonnées u' et v' seront équivalentes aux équations des géodésiques en coordonnées u et v ; autrement dit *ces formules sont covariantes* ; et la raison en est que *dans leur indétermination elles expriment sous leur forme la plus générale les relations entre les propriétés absolues de la surface et les coordonnées de Gauss employées pour l'étudier.*

On le comprend, c'est d'une part la généralité des équations de Gauss et d'autre part leur covariance qui font leur intérêt : elles feront leur intérêt surtout quand on s'en inspirera en physique pour résoudre le problème de la relativité générale, car c'est sur le modèle de cette géométrie intrinsèque des surfaces qu'Einstein devait édifier sa théorie.

Il ne put le faire toutefois qu'en s'inspirant de théories géométriques dérivées de la théorie de Gauss, mais plus approfondies, et dont il nous faut maintenant faire connaître les principes.

89. Les espaces non-euclidiens à n dimensions et leur dl^2 : Riemann, 1854. — Gauss s'était tenu très près du point de vue classique. Il opposait bien l'étude intrinsèque d'une surface, assimilable « à un solide flexible et inextensible dont une dimension est censée s'évanouir », à l'étude extrinsèque de la même surface considérée « comme la limite d'un solide » (1), c'est-à-dire comme plongée dans l'espace à trois dimensions ; mais en fait sa géométrie intrinsèque des surfaces reposait sur la géométrie de l'espace à trois dimensions, puisqu'il avait déduit originairement l'expression du dl^2 de la considération des trois coordonnées d'espace x, y, z. D'ailleurs force était de distinguer les propriétés complètes de la surface de celles qu'on pouvait déduire du dl^2, celles-ci caractérisant seulement la surface autour de chaque point ou, par intégration, dans une région limitée, et celles-là comprenant en plus la structure d'ensemble : c'est ainsi que du point de vue intrinsèque un plan et un cylindre ne diffèrent point, leur dl^2 étant le même, alors que dans l'espace ils présentent des structures d'ensemble différentes ; et cette distinction des deux sortes de propriétés supposait encore le point de vue classique.

Riemann, dans un Mémoire écrit en 1854 sur « *les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie* » (2), devait tout en s'inspirant de Gauss le dépasser et s'affranchir résolument des conceptions classiques. D'une part il étend aux « variétés », c'est-à-dire aux espaces à plus de deux dimensions la méthode intrinsèque de Gauss ; d'autre part il conçoit les espaces qu'il étudie comme possédant en propre une structure autre que celle de l'espace euclidien, de telle façon qu'il n'y avait aucune raison d'y voir des lieux géométriques d'un espace euclidien plus complexe, comme les surfaces courbes étaient des lieux géométriques de l'espace ordinaire.

On comprendra mieux du reste l'idée fondamentale de Riemann si l'on se souvient que son travail se rattachait à cette critique du postulat des parallèles qui, dans la première moitié du XIXe siècle, révéla la possibilité de géométries ne satisfaisant

(1) *Ibid.*, XIII, p. 29.

(2) *Uber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen.* Ce Mémoire, traduit par J. Houël, a été réédité dans les *Œuvres mathématiques de Riemann*. Traduction Laugel, 1 vol., Paris, 1898, p. 280-299.

pas au dit postulat (1). C'est ainsi que dans l'un des espaces de Riemann on ne peut faire passer par un point pris hors d'une « droite » aucune autre droite qui ne coupe pas la première ; ce que l'on concevra aisément si l'on identifie un tel espace dans le cas de deux dimensions à notre surface sphérique, et les « droites » dont il s'agit à nos arcs de grands cercles.

Voyons maintenant comment la géométrie de Riemann généralise celle de Gauss : les postulats fondamentaux sont les mêmes : invariance en grandeur de la distance élémentaire dl ; existence en tout point de l'espace étudié d'un espace euclidien tangent du même nombre de dimensions ; dans cet espace tangent invariance de forme du dl^2 quand tout en conservant le genre des coordonnées locales on change leur origine ou leur orientation (2).

Mais Riemann a besoin lui aussi, pour étudier la géométrie de ses espaces, de coordonnées définies dans toute leur étendue. Ces coordonnées de Riemann seront la généralisation de celles de Gauss ; c'est-à-dire qu'elles seront aussi nombreuses que les dimensions de l'espace tangent, et de l'espace riemannien lui-même. Et c'est de l'expression du dl^2 en fonction de ces coordonnées que Riemann, comme Gauss, déduira les propriétés de ses espaces.

Le dl^2 des surfaces comportait pour les coordonnées u et v trois coefficients intrinsèques, E, F, G ; pourquoi ce nombre trois ? — Parce que chacun de ces coefficients affecte un *produit de deux facteurs égaux aux différences des coordonnées*, et que ces produits dans le cas de deux coordonnées sont au nombre de trois : $dudu$, $dudv$, ou $dvdu$, et $dvdv$; le fait qu'il s'agit de produits de deux facteurs tient d'ailleurs à ce que dans le plan tangent la distance entre deux points très voisins se calcule, comme nous l'avons vu, au moyen du théorème de Pythagore appliqué à un triangle infinitésimal. Or dans l'espace ordinaire à trois dimensions ce même théorème est valable ; il suffit de l'appliquer

(1) Voir sur cette question : H. Weyl : *Temps-Espace-Matière*. Traduction G. Juvet et R. Leroy, 1 vol., Paris 1922, chap. II, p. 67 et suivantes.

(2) En fait Riemann n'explicite pas ce postulat ; mais il l'admet implicitement en imposant une certaine forme au dl^2 : nous nous exprimerons, dans l'intérêt de la clarté, comme s'il avait parlé lui-même de l'espace euclidien tangent.

deux fois pour déduire la diagonale d'un petit parallélépipède de ses trois arêtes, et dans un espace euclidien à n dimensions il suffirait de l'appliquer $n - 1$ fois. En conséquence le dl^2 de Riemann comportera autant de produits distincts de deux facteurs égaux aux différences des coordonnées qu'il peut y avoir de ces produits, et autant de coefficients analogues aux coefficients E, F, G de Gauss. Etant donné que deux produits dont les expressions ne diffèrent que par l'ordre des facteurs sont identiques ($dudv = dvdu$), le nombre des produits distincts pour n coordonnées est égal à $\frac{n(n+1)}{2}$, comme on le constaterait aisément en répartissant les produits possibles dans un tableau carré :

$$\begin{matrix} du\,du & du\,dv \\ dv\,du & dv\,dv. \end{matrix}$$

Pour $n = 2$ on a bien $\frac{2 \times 3}{2} = 3$ produits ; pour $n = 3$ on en trouverait $\frac{3 \times 4}{2} = 6$; pour $n = 4$, $\frac{4 \times 5}{2} = 10$, etc. ; et autant de coefficients.

Une façon commode de désigner les coordonnées et les coefficients du dl^2 est de numéroter les n coordonnées, représentées toutes par la même lettre, x : $x_1, x_2 \dots x_n$; et de désigner chacun des coefficients par une même lettre, g par exemple, affectée de deux indices qui correspondent aux indices des deux coordonnées figurant dans le produit : g_{11} pour dx_1^2, g_{12} pour $dx_1\,dx_2$, etc.

Alors dans l'expression du dl^2 de Gauss u et v deviennent x_1 et x_2 ; et E, F et G, g_{11}, $g_{12} = g_{21}$ et g_{22} ; d'où la formule

$$dl^2 = g_{11}\,dx_1^2 + 2\,g_{12}\,dx_1\,dx_2 + g_{22}\,dx_2^2.$$

Dans le cas d'un espace riemannien à quatre dimensions le dl^2 aurait pour expression en fonction des dix produits et des dix coefficients :

$$\begin{aligned} dl^2 = g_{11}\,dx_1^2 &+ 2g_{12}\,dx_1\,dx_2 + 2g_{13}\,dx_1\,dx_3 + 2g_{14}\,dx_1\,dx_4 \\ &+ g_{22}\,dx_2^2 \quad + 2g_{23}\,dx_2\,dx_3 + 2g_{24}\,dx_2\,dx_4 \\ &\qquad\qquad\quad + g_{33}\,dx_3^2 \quad + 2g_{34}\,dx_3\,dx_4 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + g_{44}\,dx_4^2. \end{aligned}$$

Mais il est avantageux de pouvoir abréger des expressions de ce genre : pour exprimer que les produits sont tous de deux facteurs et les coefficients tous caractérisés par deux indices, on repré-

sente symboliquement par *deux lettres* placées en indices, μ et ν par exemple, les n indices, et l'on se contente d'écrire $dl^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu$, avec cette convention que μ et ν doivent prendre toutes les valeurs de 1 à n combinées deux à deux. De cette façon

$$dl^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu \text{ (pour } \mu \text{ et } \nu = 1, 2, 3, 4)$$

est l'équivalent du dl^2 explicite écrit ci-dessus pour le cas de quatre dimensions.

Voilà donc Riemann en possession d'un dl^2 analogue à celui de Gauss. Il s'agit d'en déduire la géométrie de l'espace correspondant ; cette géométrie comportera exclusivement les propriétés qui dépendent du dl^2, et ces propriétés seront analogues à celles que Gauss avait rattachées au dl^2 dans le cas des surfaces ; en particulier il y aura encore dans tout espace de Riemann, par opposition à l'espace euclidien du même nombre de dimensions, un analogue de la courbure de Gauss, comme il y aura entre deux points éloignés quelconques de l'espace riemannien des lignes géodésiques.

Et quel sera le rapport entre ces propriétés ou éléments intrinsèques des espaces de Riemann, et leur dl^2 ? Rappelons-nous que dans la théorie de Gauss la formule des géodésiques et celle de la courbure totale étaient les mêmes pour toutes les surfaces et pour tous les systèmes de coordonnées curvilignes. La géométrie riemannienne telle que Riemann voulait la déduire d'un dl^2 devait consister aussi en des formules générales valables pour tous les espaces d'un même nombre de dimensions et de plus covariantes par rapport à tout changement des coordonnées ; en effet *se donner un dl^2 c'était se donner un espace doué de propriétés intrinsèques, ou absolues*, — au même titre que les propriétés des surfaces de Gauss —, et qui devaient se manifester toujours, quelles que soient les coordonnées employées pour étudier l'espace.

Cependant il ne faudrait pas s'imaginer que cette géométrie pouvait résulter d'une généralisation immédiate de celle de Gauss ; en particulier la découverte des propriétés véritablement covariantes était délicate. Riemann lui-même obtint sur ce point un résultat capital [1] ; toutefois la véritable méthode à suivre dans

[1] Dans la *Commentatio Mathematica*. (Riemann's Mathematische Werke. Leipzig, 2e éd. 1892, p. 403.)

ces sortes de questions ne devait être définie explicitement et dans sa généralité qu'après Riemann : c'est la méthode du calcul différentiel absolu, ou calcul tensoriel ; nous allons essayer d'en faire comprendre le principe.

90. Idée du calcul différentiel absolu : Christoffel. 1869 ; Ricci et Levi-Civita, 1888-1900. — Le dl^2 de Riemann est un polynôme homogène du second degré, c'est-à-dire dont tous les termes sont du second degré par rapport aux différentielles des variables (termes en dx_1^2, dx_1dx_2, dx_2^2, dans le cas de deux dimensions). C'est ce qu'on appelle aussi une *forme quadratique* — à cause du second degré — à n variables, n étant le nombre des dimensions de l'espace. L'étude des propriétés absolues d'un espace riemannien à partir de son dl^2 revenait à chercher quelles relations indépendantes du choix des coordonnées on pouvait déduire de cette forme dite fondamentale. On peut évidemment considérer une forme quadratique indépendamment de sa signification géométrique et se poser à son sujet un problème d'analyse analogue au problème géométrique de Riemann : c'est sous cet angle analytique que Christoffel fut conduit à envisager la question en 1869.

Les deux mathématiciens découvrirent indépendamment l'un de l'autre certains théorèmes importants pour la solution des problèmes qu'ils s'étaient posés. Mais la question fut reprise à partir de 1888 par Ricci, puis par Levi-Civita, sous son aspect le plus général, et traitée par ces auteurs selon une méthode qu'ils appelèrent *le calcul différentiel absolu* (¹). En voici l'idée directrice : pour étudier une variété à n dimensions à partir de son dl^2, au lieu de particulariser les coordonnées en choisissant celles qu'on croit les plus simples ou les plus aptes à mettre en évidence les propriétés de la variété, il faut au contraire les laisser exprès indéterminées, de façon à exclure systématiquement toute relation spéciale à telles ou telles coordonnées, au profit des seules relations absolues (²).

C'est en procédant ainsi qu'on s'est expliqué l'importance capitale pour la solution du problème dont nous avons parlé plus haut

(¹) Ricci et Levi-Civita : *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications.* (Mémoire paru en 1900 dans les *Mathematische Annalen*, t. LIV) ; réimpression, 1 brochure, Paris, Blanchard, 1923.

(²) *Ibid.*, ch. II, § 7, p. 144.

de certains ensembles de grandeurs déjà mis en évidence par Riemann et par Christoffel ; et que, après avoir découvert leur caractère essentiel, on parvint à en définir d'autres du même genre et à en faire l'objet d'une étude méthodique.

91. Les tenseurs et leur propriété essentielle. — Ces ensembles de grandeurs furent appelés depuis des *tenseurs* : ce nom se rencontre pour la première fois dans un travail de W. Voigt, qui fut publié en 1898 : *Die fundamentalen Eigenschaften der Kristalle* ; travail auquel le même auteur se réfère dans un rapport pour le Congrès international de Physique de 1900 (1). Dans ce rapport Voigt dit qu'il a proposé le nom de *tenseurs* pour désigner des fonctions qui jouent un rôle important dans la théorie de l'élasticité, et qui diffèrent à la fois des scalaires et des vecteurs (2).

Pour donner une idée de ce que sont ces tenseurs, le mieux est de se placer au point de vue de la géométrie de Gauss, ou plutôt de Riemann, qui est essentiellement une géométrie analytique et différentielle. Considérons une réalité géométrique quelconque définie « en un point » d'un espace de Riemann : distance élémentaire, vecteur infinitésimal, courbure de l'espace au point considéré et suivant telle direction, etc. Une réalité de ce genre n'est jamais considérée en elle-même et d'une façon absolue, selon la méthode d'Euclide, mais est toujours rapportée à des coordonnées ; elle entretient avec les coordonnées certaines relations, lesquelles changent nécessairement quand les coordonnées changent, puisque la réalité, elle, demeure la même.

Or un tenseur, tout au moins un tenseur géométrique, est un ensemble de grandeurs — appelées ses composantes —, qui expriment les relations d'une réalité géométrique avec les coordonnées, et qui sont soumises essentiellement à la condition de se transformer, quand on change de coordonnées, suivant des équations *linéaires* — c'est-à-dire où les variables n'entrent qu'au premier degré, et *homogènes* — c'est-à-dire où tous les termes sont du même degré par rapport à l'ensemble des variables. Mais ces relations de la réalité géométrique avec les coordonnées se trouvent exprimées

---

(1) *Rapports présentés au Congrès International de Physique réuni à Paris en 1900*, 3 vol., Paris, 1900, t. I, p. 277-347 : *L'état actuel de nos connaissances sur l'élasticité des cristaux*, par W. Voigt, traduit de l'allemand par P. Weiss.

(2) *Ibidem*, p. 280.

par le tenseur sous leur forme la plus générale, c'est-à-dire sous la forme partiellement indéterminée qui, eu égard à la nature du problème, présente le *maximum de complication.* De cette façon cette forme est valable pour tous les systèmes de coordonnées, quitte à se simplifier par annulation de certains éléments quand il s'agira de systèmes privilégiés. Du reste les cas où se rencontreront de telles simplifications seront considérés comme répondant à des formes « dégénérées » de la forme complète, à laquelle on se réfèrera toujours : on peut dire qu'*on réalise dans les tenseurs le bloc des relations les plus compliquées qu'un être géométrique peut avoir avec des coordonnées*, ce qui permet de raisonner sur ces tenseurs comme sur des objets géométriques isolables [1].

Dans le peu que nous avons dit de la géométrie du plan en coordonnées curvilignes ou de la géométrie des surfaces de Gauss nous trouverions déjà des exemples simples de tenseurs.

Soit le dl^2 d'un plan : il a pour expression en coordonnées rectangulaires x, y :

$$dl^2 = dx^2 + dy^2;$$

en coordonnées cartésiennes obliques x', y' :

$$dl^2 = dx'^2 + 2\,dx'\,dy' \cos\theta + dy'^2;$$

en coordonnées polaires ρ, θ :

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2\,d\theta^2.$$

Ce sont là autant d'expressions particulières qui reflètent les relations de la distance élémentaire dans le plan avec tels ou tels axes ou courbes coordonnés. Mais nous savons aussi que le dl^2 a pour expression générale sur toutes les surfaces, donc sur le plan,

$$dl^2 = g_{11}dx_1{}^2 + g_{12}dx_1dx_2 + g_{21}dx_2dx_1 + g_{22}\,dx_2{}^2.$$

Ici sont exprimées sous leur forme la plus compliquée et par là même la plus indéterminée et la plus générale les relations de dl avec les coordonnées : le groupe des quatre coefficients $g_{\mu\nu}$ est

---

[1] On s'exprime souvent comme si l'on identifiait les tenseurs avec les réalités géométriques considérées en elles-mêmes. Ce n'est là qu'une façon commode de parler, mais qui ne doit pas faire oublier qu'*un teneur suppose toujours à la fois un être géométrique et des axes coordonnés*, et même une façon déterminée de rapporter cet être géométrique à ces axes — projections orthogonales ou projections parallèles aux axes, par exemple, pour un vecteur du plan rapporté à des axes obliques.

le tenseur qui correspond à ces relations ; on l'appelle le tenseur $g_{\mu\nu}$.

Ce tenseur a pour composantes, avec les coordonnées x et y,

$$g_{11} = g_{22} = 1 \qquad \text{et} \qquad g_{12} = g_{21} = 0\,;$$

et avec les coordonnées x' et y',

$$g'_{11} = g'_{22} = 1 \qquad \text{et} \qquad g'_{12} = g'_{21} = \cos\theta.$$

Sait-on passer des $g_{\mu\nu}$ aux $g'_{\mu\nu}$ étant données les équations de transformation des coordonnées elles-mêmes ? Oui, grâce précisément aux équations de transformation du tenseur $g_{\mu\nu}$, qu'on déduit de celles des coordonnées et de la constitution de ce tenseur.

Voici à titre d'exemple l'équation générale qui donne g'_{11} en fonction de g_{11}, g_{12}, g_{21} et g_{22} :

$$g'_{11} = \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial x}{\partial x'}\,g_{11} + \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial y}{\partial x'}\,g_{12} + \frac{\partial y}{\partial x'}\frac{\partial x}{\partial x'}\,g_{21} + \frac{\partial y}{\partial x'}\frac{\partial y}{\partial x'}\,g_{22}\,^{(1)}.$$

On voit que tous ses termes sont bien du premier degré en g_{11}, g_{12}, g_{21} et g_{22}. Il en est de même des trois autres équations, relatives à g'_{12}, g'_{21} et g'_{22} : toutes les équations de transformation des composantes du tenseur $g_{\mu\nu}$ — ou plus brièvement les équations de transformation du tenseur $g_{\mu\nu}$ — sont linéaires et homogènes par rapport à ces composantes, conformément à la définition générale des tenseurs.

Bien que les équations de transformation de tous les tenseurs soient linéaires et homogènes, elles peuvent différer d'après la nature des coefficients de leurs termes : de ce point de vue on est conduit à opposer *deux modes fondamentaux de transformation des tenseurs*, et corrélativement deux espèces principales de tenseurs.

L'intérêt des deux transformations fondamentales dont il s'agit est que si, ayant affaire à deux tenseurs dont l'un admet la première transformation et l'autre la seconde, on multiplie les unes par les autres les composantes de même rang des deux ten-

---

(1) La comparaison directe des g et des g' montre que dans le passage de x, y à x', y' on a $g'_{11} = g_{11}$. Ceci résulte bien de notre équation, car dans le problème en question les coefficients de tous les termes y sont nuls, sauf celui du premier terme qui est égal à 1.

seurs et qu'on ajoute les produits obtenus, le résultat — qu'on appelle produit intérieur des deux tenseurs — est un invariant ; c'est-à-dire qu'en vertu d'une sorte de compensation entre les modifications introduites dans les deux tenseurs par le changement des coordonnées ledit produit a une valeur indépendante de ce changement. L'une des transformations est appelée transformation *covariante* ou par covariance, et l'autre, précisément en raison de son rôle compensateur, transformation *contrevariante*, ou par contrevariance.

Pour définir la première rappelons d'abord en quoi consiste un premier mode de transformation des fonctions, la transformation par invariance : soit une grandeur qui est fonction de la seule position, par exemple la courbure totale d'une surface ; et soit $f(u, v)$ son expression en coordonnées curvilignes, u, v et $f'(u', v')$ son expression en coordonnées u' et v'. Comme ces deux fonctions représentent la même grandeur, elles sont égales, et nous pouvons écrire

$$f(u, v) = f'(u', v').$$

C'est en ce sens qu'on dit qu'elles se transforment par invariance.

Soit donc maintenant une fonction quelconque f de deux coordonnées x et y qui se transforme par invariance quand on emploie d'autres coordonnées x' et y', de telle sorte qu'on ait

$$f(x, y) = f'(x', y').$$

Demandons-nous comment se transforment les dérivées partielles premières de f : ces dérivées sont $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$; celles de f' sont $\frac{\partial f'}{\partial x'}$ et $\frac{\partial f'}{\partial y'}$; les deux fonctions étant égales leurs dérivées par rapport aux mêmes variables sont égales aussi ; or la dérivée de f par rapport à x' est

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x'} ;$$

tandis que celle de f' par rapport à x' est $\frac{\partial f'}{\partial x'}$; nous pouvons donc écrire, en mettant en avant de chaque terme le coefficient de la transformation pour le passage de x à x' :

$$\frac{\partial f'}{\partial x'} = \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x'}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Nous aurons de même :

$$\frac{\partial f'}{\partial y'} = \frac{\partial x}{\partial y'}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y'}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Les coefficients $\frac{\partial x}{\partial x'}$, $\frac{\partial y}{\partial x'}$, $\frac{\partial x}{\partial y'}$, $\frac{\partial y}{\partial y'}$, des termes des équations de transformation sont les dérivées partielles des *anciennes* variables par rapport aux nouvelles : telle est la caractéristique des transformations *covariantes.* Un tenseur dont les composantes se transforment conformément aux équations que nous venons d'obtenir, c'est-à-dire admettent comme coefficients des termes de leurs équations de transformation les dérivées partielles des anciennes variables par rapport aux nouvelles, ou des produits de ces dérivées, est un *tenseur covariant.* Il est évident d'après ce qui précède que les dérivées partielles elles-mêmes de la fonction f qui se transforme par invariance, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont les composantes d'un tenseur covariant.

Un simple vecteur de l'espace projeté orthogonalement sur des axes rectilignes a par rapport à ces axes des composantes qui sont les composantes d'un tenseur ; ce tenseur aussi est covariant.

Voyons maintenant ce qu'est la transformation *contrevariante* : il nous suffira pour la définir de considérer les différentielles elles-mêmes des coordonnées x et y d'un point dans un plan, et leurs relations avec des différentielles d'autres coordonnées x' et y' du même point : d'après la définition des différentielles totales, on a quand on passe de x et y à x' et y', x' et y' étant considérées comme fonctions de x et de y :

$$dx' = \frac{\partial x'}{\partial x}dx + \frac{\partial x'}{\partial y}dy$$

et

$$dy' = \frac{\partial y'}{\partial x}dx + \frac{\partial y'}{\partial y}dy.$$

Telle est la façon dont s'expriment dx' et dy' en fonction de dx et dy : dans ces équations de transformation les coefficients $\frac{\partial x'}{\partial x}$ $\frac{\partial x'}{\partial y}$, $\frac{\partial y'}{\partial x}$ et $\frac{\partial y'}{\partial y}$ sont les dérivées partielles des *nouvelles* variables par rapport aux anciennes, à l'inverse de ce qui avait lieu dans les équations de la transformation covariante. Un tenseur dont les composantes se transforment comme les différentielles des coor-

données d'un point est un *tenseur contrevariant.* C'est évidemment le cas du tenseur des dx dont les produits entrent dans la composition du dl^2, puisque ces dx ne sont autre chose que les différentielles des coordonnées d'un point.

En prenant comme exemple de tenseur covariant celui des dérivées partielles $\frac{\partial m}{\partial x}$ et $\frac{\partial m}{\partial y}$ de la position d'un point ; et comme exemple de tenseur contrevariant celui des différentielles dx et dy des coordonnées de ce point, nous pouvons montrer comment leur *produit intérieur est un invariant.*

Ecrivons ce produit en fonction des premières coordonnées x et y : les composantes à multiplier l'une par l'autre sont d'une part $\frac{\partial m}{\partial x}$ et dx, d'autre part $\frac{\partial m}{\partial y}$ et dy ; la somme des produits sous sa première forme, c'est-à-dire en fonction de x et y, s'écrit

$$\frac{\partial m}{\partial x}dx + \frac{\partial m}{\partial y}dy\,;$$

c'est la différentielle totale du point par rapport à x et y.

Si nous prenons x' et y' comme nouvelles variables, la somme des produits devient

$$\frac{\partial m'}{\partial x'}dx' + \frac{\partial m'}{\partial y'}dy'\,;$$

c'est la différentielle totale du point par rapport à x' et y'.

Or les différentielles premières d'une fonction ont toujours une valeur indépendante du choix des variables ; donc $dm = dm'$, et le produit intérieur des deux tenseurs, d'abord égal à dm, ensuite à dm', est bien un invariant, comme du reste on le constaterait directement en l'effectuant sous ses deux formes.

C'est ainsi que les tenseurs se distinguent d'après leur façon de se transformer — on peut dire d'après leur *variance.* Ils se distinguent aussi d'après leur complexité ; on conçoit en effet que suivant la réalité géométrique étudiée — vecteur dans un plan ou vecteur de l'espace par exemple — les tenseurs auront des composantes plus ou moins nombreuses, et se rattacheront diversement aux coordonnées. De fait ils présentent des degrés de complication analogues aux degrés des expressions algébriques, et qu'on appelle leur *ordre.* Un tenseur d'un espace à n dimensions est d'ordre p, par définition, quand le nombre de ses composantes est n^p ; ainsi dans un espace à trois dimensions un tenseur du pre-

mier ordre a trois composantes (c'est le cas de l'ensemble des composantes d'un vecteur) ; un du second ordre en a neuf ; un du troisième ordre, vingt-sept, etc. Par extension on appelle *tenseurs d'ordre nul* les grandeurs scalaires, qu'on peut considérer comme n'ayant qu'une seule « composante » dans un espace quelconque : en effet, quel que soit n, on a $n^0 = 1$. L'unique « composante » d'un tel tenseur ne pouvant changer sans que le tenseur lui-même ne change, un tenseur d'ordre nul est un *invariant.*

Un tenseur d'ordre p, disions-nous, a n^p composantes dans un espace à n dimensions : toutefois ces n^p composantes ne sont pas toujours différentes les unes des autres ; quand $p = 2$ il arrive souvent que, si les composantes sont disposées dans un tableau carré, chacune de celles qui sont à gauche de la diagonale principale est égale, au moins en valeur absolue, à l'une de celles qui sont à droite. On dit que ce tenseur est *symétrique.* Il y a du reste d'autres cas plus compliqués de symétrie des tenseurs.

Pour désigner symboliquement les tenseurs, on tient compte à la fois de leur ordre et de leur variance : si l'on désigne un tenseur en général par une grande lettre, T par exemple, *son ordre se reconnaîtra au nombre des indices* accompagnant cette grande lettre : ce sont d'ordinaire de petites lettres grecques ou latines. Ainsi un tenseur du second ordre aura pour symbole $T_{\mu\nu}$, μ et ν prenant autant de valeurs qu'il y a de dimensions dans l'espace auquel le tenseur appartient. Un tenseur du quatrième ordre s'écrira $T_{\mu\nu\rho\sigma}$.

Quant à *la variance* elle *sera indiquée par la place des indices*, lesquels s'écrivent en bas et à droite pour les tenseurs covariants : $T_{\mu\nu}$; en haut et à droite pour les tenseurs contrevariants : $T^{\mu\nu}$. Un tenseur peut être covariant par rapport à certains indices et contrevariant par rapport à d'autres ; c'est-à-dire que sa transformation présente à la fois les caractères des deux transformations fondamentales ; un tel tenseur s'écrit avec des indices en haut et des indices en bas : $T^{\rho\sigma}_{\mu\nu}$ par exemple. Il est dit *mixte.*

Nous n'avons parlé jusqu'ici que des tenseurs géométriques : or on peut concevoir des systèmes de grandeurs qui sans avoir de signification géométrique sont constitués et se transforment comme des tenseurs géométriques de tel ordre et de telle variance, et qui, s'ils sont définis par exemple dans un espace en fonction

de la position, peuvent figurer dans des relations au même titre que ces tenseurs géométriques. C'est d'une manière analogue que l'on pouvait déjà mettre en relation avec des invariants ou des vecteurs géométriques des grandeurs physiques scalaires ou vectorielles définies en tout point de l'espace : telle la densité de matière, qu'on peut définir en tout point d'un milieu continu en fonction de la distance aux axes ; ou l'intensité d'un champ de forces en tout point de ce champ.

On le voit, la diversité des tenseurs est grande ; mais tous présentent ce caractère commun, que nous avons du reste mentionné dans notre définition générale, qu'ils se transforment suivant des équations linéaires et homogènes : c'est ici une propriété essentielle des tenseurs, car elle entraîne immédiatement cette conséquence que *si toutes les composantes d'un tenseur se trouvent être nulles dans un système de coordonnées* (nous verrons bientôt comment cela peut se faire), *elles le seront aussi dans tout autre système* [1] ; si bien qu'une loi qui pourrait s'exprimer par l'annulation d'un tenseur serait, par là même, *covariante* vis-à-vis de tout changement de coordonnées. C'est précisément à cause de cela que l'étude des tenseurs s'est imposée à Einstein dès qu'il eut conçu le dessein de soumettre les lois physiques au principe général de relativité ; et c'est aussi la raison pour laquelle nous devons faire connaître dans notre exposé l'essentiel de la théorie des tenseurs.

92. Le calcul tensoriel et la généralisation du principe classique d'homogénéité. — Nos définitions vont nous permettre de faire entrevoir l'objet du calcul différentiel absolu, qu'on appelle aussi *calcul tensoriel.* C'est d'abord de définir les opérations qu'on peut effectuer sur les tenseurs ; ensuite de préciser les opérations qu'on peut faire subir à un tenseur sans altérer son caractère tensoriel.

On peut additionner deux tenseurs, mais à condition qu'ils

(1) C'est facile à constater sur un cas simple : soient $x' = ax + by$ et $y' = cx + dy$ les équations de transformation de x et y en x' et y', équations linéaires et homogènes si a, b, c, et d sont des constantes. Il est manifeste que si x et y sont nuls, x' et y' le seront aussi. Inversement la nullité de x' et y' entraîne celle de x et y, ce qu'on verrait immédiatement en tirant des deux équations données les expressions de x et de y en fonction de x' et de y'.

soient de même ordre et de même variance ; la soustraction et l'égalité sont évidemment soumises à la même condition. En conséquence la somme ou la différence de deux tenseurs est encore un tenseur qui présente les mêmes caractères que les tenseurs primitifs. Au contraire la multiplication de deux tenseurs ne conserve pas, d'ordinaire, dans le produit, l'ordre et la variance des tenseurs primitifs.

Outre ces opérations fondamentales il existe une opération spéciale aux tenseurs *mixtes* et qu'on appelle la *contraction* : elle consiste à donner la même valeur numérique à deux indices du tenseur, l'un de caractère covariant l'autre de caractère contrevariant ; et elle a pour résultat d'abaisser l'ordre du tenseur de deux unités ; quand la contraction est complète on a un tenseur d'ordre nul, c'est-à-dire un invariant.

Enfin on peut prendre la dérivée d'un tenseur. Seulement, tandis que la dérivée ordinaire d'un scalaire est un tenseur, celle d'un tenseur en général, et en particulier d'un vecteur, n'en est plus un ; et les propriétés de l'espace qui s'expriment par exemple au moyen de la dérivée d'un vecteur ne sont pas indépendantes des coordonnées. Aussi a-t-on cherché à définir une fonction de la dérivée d'un vecteur, ou en général d'un tenseur, qui soit elle-même un tenseur : l'opération qui conduit à ce résultat a été découverte par Christoffel et s'appelle la *dérivation covariante* ; le résultat lui-même est la *dérivée covariante du tenseur.*

Pour faire comprendre cette importante notion, rappelons en quoi consiste la dérivée d'un vecteur : différentier un vecteur suppose qu'on ait affaire non à un vecteur isolé — lequel étant seul est invariable et ne saurait avoir de dérivée, mais à un ensemble de vecteurs définis en tous les points d'une variété, et fonction de leur position dans la variété ; par exemple les vecteurs d'un champ de forces, lesquels peuplent tout l'espace où règne le champ ; ou en géométrie l'ensemble des vecteurs tangents à une famille de courbes. Différentier « un vecteur » de l'ensemble c'est exprimer la différence entre ce vecteur et un vecteur infiniment voisin. Supposons donc que nous ayons affaire à un ensemble de vecteurs situés dans un même *plan*, et que nous rapportions le plan à des coordonnées curvilignes quelconques. La différentiation ne peut s'effectuer directement

que sur les composantes du vecteur ; et ces composantes sont les projections du vecteur sur des axes rectilignes tangents aux coordonnées curvilignes telles qu'elles sont à l'origine du vecteur. Si l'on passe à un point très voisin, non seulement les axes tangents aux coordonnées, qui étaient en général obliques, ont changé d'origine, mais de plus leur angle, en général, a changé [1]. Les composantes du vecteur qui part du nouveau point vont donc être relatives à de nouveaux axes obliques ; par suite leur différence par rapport aux composantes du vecteur primitif ne sera qu'une partie de la différence entre les deux vecteurs eux-mêmes ; pour obtenir cette dernière différence, qui est proprement la différentielle du vecteur primitif, il faut ajouter aux différentielles des composantes la variation des axes ; un peu comme pour obtenir la vitesse absolue d'un mobile il faut ajouter à sa vitesse relative sa vitesse d'entraînement.

Or la dérivée ordinaire n'exprime que la variation — relative aux coordonnées — des composantes du vecteur ; tandis que la dérivée covariante exprime — et exprime seule — la variation du vecteur lui-même, sa *variation absolue* : on voit par cet exemple que le nom de calcul différentiel absolu donné au calcul tensoriel est parfaitement justifié.

Ce que nous venons de dire d'un vecteur dans un plan s'applique à un vecteur infinitésimal sur une surface courbe ou dans un espace riemannien quelconque, et aussi à tout tenseur défini dans un tel espace.

Nous venons de supposer que nos coordonnées étaient quelconques : supposons-les maintenant rectilignes, ce qui exclut cette fois le cas des espaces courbes : alors d'un point à l'autre il n'y a plus changement d'orientation des axes ; les composantes étant relatives, pour les deux vecteurs, aux mêmes axes, leurs dif-

---

[1] Du point de vue de la théorie des groupes, on voit que le changement d'axes rectilignes locaux dont nous venons de parler, changement qui ne conserve pas l'angle des axes, n'est plus équivalent au groupe des *déplacements euclidiens* ; en effet un déplacement euclidien aurait simplement transporté l'origine et imposé aux axes une rotation d'ensemble qui eût conservé leur angle. Nous savons que par rapport au groupe des déplacements la forme du dl^2 était invariante ; par rapport à des transformations qui changent l'angle des axes cette forme n'est plus conservée. Cependant d'autres éléments conservant leur forme dans ces sortes de transformations, elles constituent un nouveau groupe, celui de la *géométrie affine*.

férentielles constituent la différentielle du vecteur primitif lui-même : *avec des axes rectilignes dans un plan*, donc, *et aussi avec leur analogue dans un espace euclidien à plus de deux dimensions, la dérivée ordinaire et la dérivée covariante s'identifient.*

Disons encore que le calcul tensoriel établit aussi des règles qui permettent de savoir si telle grandeur qu'on n'a pas constituée soi-même selon la définition des tenseurs, mais qu'on a obtenue autrement, est ou n'est pas un tenseur. Voici un exemple d'une telle règle et de son utilisation : on démontre que si le produit intérieur d'une quantité $A_{\mu\nu}$, symétrique, par un tenseur contrevariant de la forme $B^\mu B^\nu$, où B^μ est un tenseur du premier ordre contrevariant quelconque, est toujours un invariant, cette quantité $A_{\mu\nu}$ est elle-même un tenseur covariant. Considérons le dl^2 d'une surface ; il a pour expression avec les coordonnées $x_1 x_2$

$$dl^2 = g_{11}dx_1^2 + 2g_{12}dx_1dx_2 + g_{22}dx_2^2.$$

Les quantités dx_1 et dx_2 sont les composantes d'un tenseur contrevariant, du premier ordre puisqu'elles sont au nombre de deux pour deux dimensions ; les produits $dx_\mu dx_\nu$ de ces quantités sont les composantes d'un tenseur contrevariant du type $B^\mu B^\nu$. Le dl^2 lui-même résulte de la multiplication de ce tenseur contrevariant du second ordre par les $g_{\mu\nu}$, et il est un invariant. Donc, d'après la règle, les $g_{\mu\nu}$ sont les composantes d'un tenseur covariant, comme du reste on pourrait le constater directement. C'est le « tenseur fondamental covariant » ; il est du second ordre, ayant n^2 composantes ; de plus il est symétrique, du fait de l'égalité deux à deux de ses termes rectangles.

Au surplus les règles spéciales du calcul tensoriel ne présentent guère d'intérêt pour nous ; par contre nous devons mettre en évidence un principe qui joue dans ce calcul un rôle important au point de vue des applications : nous avons dit que l'addition, la soustraction ou l'égalité de deux tenseurs exigeaient qu'ils soient de même variance et du même ordre ; il y a là ce qu'on peut appeler un *principe d'homogénéité tensorielle*, analogue du principe d'homogénéité ordinaire qui en géométrie et en physique ne permet de relier par les signes + ou —, ou par le signe =, que des grandeurs de mêmes dimensions.

D'ailleurs l'homogénéité tensorielle ne concerne pas uniquement l'ordre et la variance des tenseurs : elle s'étend à des pro-

priétés secondaires, par exemple leur symétrie, si bien que l'identité de ces propriétés secondaires sera requise dans deux tenseurs pour qu'on puisse les déclarer égaux.

On sait que, en physique classique, des considérations purement formelles d'homogénéité suffisent dans certains cas pour découvrir certaines relations : ainsi, sachant que le mouvement, et par conséquent la période T, d'un pendule dépendent à la fois et exclusivement de sa longueur l et de l'intensité g de la pesanteur, on peut dire *a priori* que la formule de la période sera $T = k\sqrt{\frac{l}{g}}$, où k est un coefficient numérique ; cela parce qu'il n'y a pas d'autre façon que celle-là de combiner l et g pour obtenir une grandeur ayant les dimensions d'un temps. D'une manière analogue, mais bien plus féconde en raison de la complexité même des tenseurs, le principe d'homogénéité tensorielle permettra souvent d'écrire *a priori* la forme des relations possibles entre des tenseurs donnés ou supposés, ce qui constituera dans certains problèmes un puissant moyen de découverte.

Nous devons nous borner à ces indications très sommaires ; mais elles nous suffiront pour comprendre un peu comment les tenseurs peuvent servir à l'étude des espaces dont on connaît le dl^2, et surtout pour comprendre comment les tenseurs permirent à Einstein de poser sous sa forme définitive et de résoudre en partie le problème physique de la relativité générale.

93. Relations tensorielles et propriétés intrinsèques générales des espaces riemanniens. — Pour étudier un espace tel que le conçoit Riemann il faut s'être donné son dl^2 : il s'agit pour nous de savoir comment l'on utilisera le calcul tensoriel pour déduire de cette donnée fondamentale, et plus précisément du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ qu'elle implique, les propriétés de l'espace correspondant.

Notons d'abord que tout tenseur géométrique, c'est-à-dire rattaché plus ou moins immédiatement au dl^2, peut exprimer une propriété de l'espace ; toutefois il l'exprimera seulement en fonction des unités choisies, puisque sa valeur dépendra de ces unités, à moins précisément qu'elle ne soit 0. C'est pourquoi l'on cherche à exprimer autant que possible la géométrie de l'espace au moyen de tenseurs égaux à 0, c'est-à-dire de tenseurs

pour lesquels le choix des unités est indifférent, le fait qu'ils sont nuls étant évidemment indépendant des unités choisies. Mais en quoi peuvent consister ces *tenseurs nuls*, c'est-à-dire dont toutes les composantes sont nulles ?

Ce seront d'abord certains invariants toujours nuls qui par exemple s'obtiendront à partir de tenseurs par contraction ; et c'est là un premier moyen d'appliquer le calcul tensoriel à l'étude des espaces ; ce seront aussi des tenseurs résultant d'opérations effectuées sur d'autres tenseurs différents de 0, par exemple un tenseur égal à la différence de deux tenseurs égaux ; ou encore un tenseur déduit d'un autre par dérivation covariante, auquel cas, le tenseur dérivé étant nul, on conclura que le tenseur primitif est constant.

Mais — et c'est ici, nous le savons, la propriété essentielle des tenseurs — quand toutes les composantes d'un tenseur sont nulles dans un système de coordonnées elles le sont aussi, nécessairement, dans tout autre système, puisqu'elles se transforment selon des équations linéaires et homogènes : l'annulation d'un tenseur géométrique pourra donc exprimer une propriété géométrique absolue.

On appelle plus spécialement *relations tensorielles* les relations qui expriment que telle quantité est un tenseur égal à 0 ; et le problème fondamental de la géométrie de Riemann revient à la découverte de relations de ce genre. A supposer que l'on connaisse par la géométrie classique telle propriété absolue d'un espace, on pourra chercher à l'exprimer par une relation tensorielle ; si l'on y arrive, on saura par le fait même comment cette propriété se généralise pour tous les espaces du même nombre de dimensions que le premier. Inversement, à supposer qu'on ait su déduire d'un dl^2 telle relation tensorielle, on pourra chercher quelle propriété géométrique intrinsèque lui correspond dans les espaces déjà connus.

C'est l'espace euclidien en coordonnées cartésiennes que l'on connaît le mieux ; or ses propriétés, même exprimées analytiquement, ne sont pas généralisables telles quelles, parce que la plupart du temps l'usage de coordonnées cartésiennes annule un certain nombre des composantes des tenseurs qui correspondraient au cas général, et ne laisse à leur ensemble qu'une forme simplifiée — ou « dégénérée » — où ces tenseurs ne se reconnaissent plus ;

mais sachant qu'il existe des relations tensorielles valables pour tous les espaces d'un nombre donné de dimensions, on s'efforcera, en s'aidant des règles du calcul et en particulier du principe d'homogénéité tensorielle, de reconstituer les tenseurs dans leur intégrité à partir de leur forme dégénérée, et c'est seulement alors qu'on saura comment se généralisent les propriétés de l'espace ordinaire [1].

Disons pour préciser ces notions trop générales que l'on sait exprimer tensoriellement dans un espace quelconque la forme de ses géodésiques, et ce qu'on peut appeler ses différentes « courbures » en chaque point ; car on sait définir un tenseur qui mesure la « courbure riemannienne » de l'espace, et un invariant qui mesure la « courbure totale » de l'espace, cette dernière propriété étant l'analogue de la courbure totale de Gauss pour les surfaces.

Les géodésiques nous sont déjà connues comme lignes de plus courte longueur entre deux points éloignés ; elles sont aussi, comme c'est évident pour les droites euclidiennes, les lignes de direction intrinsèque constante ; et cette dernière propriété s'exprime tensoriellement par cette condition que la dérivée covariante de leur tangente est nulle.

La courbure riemannienne de l'espace a pour mesure un tenseur déduit du tenseur des $g_{\mu\nu}$ et qu'on appelle le tenseur de Riemann-Christoffel ; c'est proprement le *tenseur de courbure* de l'espace ; quant à la courbure de Gauss généralisée, qui est un invariant, elle se déduit par deux contractions successives du tenseur de Riemann-Christoffel.

Grâce à ces indications nous allons pouvoir préciser le rôle des $g_{\mu\nu}$ dans la détermination d'un espace : nous savons que ces

---

(1) L'application systématique du calcul tensoriel à la géométrie fut inaugurée par Ricci et Levi-Civita, à partir de 1895. Voir : Ricci et Levi-Civita, *Méthodes de calcul différentiel absolu* : ch. IV. *Applications géométriques*. p. 165-177. Dans le même ouvrage les mêmes auteurs appliquent leur méthode à de nombreuses questions de mécanique et de physique, mais en se plaçant toujours au point de vue classique d'un espace euclidien et d'un temps absolu. Riemann au contraire, dès 1854, avait, tout en conservant lui aussi l'idée d'un temps absolu, envisagé l'hypothèse d'un rattachement des lois physiques à une structure non-euclidienne *de l'espace*, ce qui dans son esprit devait libérer le physicien, toujours obligé de réajuster ses lois à la réalité, « de l'étroitesse de préjugés traditionnels capables de masquer la vraie dépendance mutuelle des choses ». Voir Riemann : *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie*, édition citée, p. 297.

TABLE DES MATIÈRES

Principes de la théorie générale

ERRATUM

Page 232 (IV-24), *au lieu de :* pour une source et un récepteur liés à un *même* système d'inertie, *lire :* pour des récepteurs liés à des systèmes d'inertie.

Saint-Amand (Cher). — Imprimerie R. Bussière. — 8-3-1937.

coefficients varient pour un même espace d'un système de coordonnées à un autre ; considérons une surface : *par eux-mêmes les* $g_{\mu\nu}$ révèleront l'espacement et l'orientation relative, en chaque point, des lignes coordonnées ; c'est ainsi que les valeurs R^2, 0 et $R^2 \sin^2 u$ des $g_{\mu\nu}$ du dl^2 de la sphère correspondent au choix des méridiens et des parallèles comme coordonnées.

Par leurs dérivées premières les $g_{\mu\nu}$ révèleront la façon dont les lignes coordonnées diffèrent des géodésiques, en d'autres termes mettront en évidence leur *courbure géodésique*, ou par rapport aux géodésiques, qui, elles, ont relativement à la surface une direction constante. Ainsi sur notre sphère les méridiens u auront des tangentes à dérivée covariante nulle, puisqu'ils sont précisément des géodésiques ; les parallèles v auront des tangentes à dérivée covariante différente de 0, correspondant à une courbure géodésique qui croît avec la latitude.

Mais tout cela est encore relatif aux coordonnées : c'est seulement *par leurs dérivées secondes* que les $g_{\mu\nu}$ manifesteront la courbure de la surface, et ces dérivées entreront dans les relations tensorielles où s'exprimera cette courbure. L'interprétation géométrique de ceci est facile : dans le cas d'une surface la courbure consiste dans une différence entre la surface et un plan ; considérons donc le plan tangent en un point ; et projetons sur ce plan les coordonnées u, v tracées sur la surface ; elles donneront lieu dans le plan à un dl^2 qui aura ses $g_{\mu\nu}$; ces $g_{\mu\nu}$ seront les mêmes, au point de contact, que ceux du dl^2 de la surface avec les coordonnées u, v ; les dérivées premières des $g_{\mu\nu}$ des deux dl^2 seront aussi toujours les mêmes ; mais jamais les dérivées secondes ne seront les mêmes, quelles que soient les coordonnées u, v ; et c'est par cette différence dont l'existence est indépendante du choix des coordonnées que se manifestera la courbure de la surface.

94. Tenseurs de l'E. T. et lois physiques covariantes. — Nous savons que l'hypothèse fondamentale d'Einstein est qu'il existe une géométrie d'Univers ; nous pouvons maintenant préciser cette hypothèse. La géométrie générale d'Univers sera dans l'E. T. l'analogue de la géométrie de Riemann dans l'espace pur.

Pour la découvrir il faudra avant tout définir dans l'E.T. l'analogue du dl^2 spatial en tant que grandeur invariante, l'ana-

logue de l'espace euclidien tangent, et l'analogue du groupe qui dans cet espace laisse au dl^2 sa forme, c'est-à-dire du groupe des déplacements euclidiens qui s'exprime analytiquement par un changement de l'origine ou de l'orientation d'ensemble des coordonnées, sans changement du genre de ces coordonnées. L'analogue de la distance dl sera, nous le savons déjà par la géométrie d'Univers de Minkowski, l'intervalle spatio-temporel ds. L'analogue de l'espace-euclidien tangent sera l'E. T. de Minkowski, et dans cet E. T. le groupe qui laissera au ds^2 sa forme sera le groupe de la transformation de Lorentz, c'est-à-dire le passage d'un système d'inertie à un autre système d'inertie, les coordonnées étant du même genre dans les deux systèmes : de préférence on supposera que ce sont les coordonnées habituelles, x, y, z, t.

On voit que *le postulat fondamental de la théorie consiste à admettre qu'en tout « point » de l'E. T. on peut utiliser un système d'inertie, local et éphémère, où se vérifient les lois de la relativité restreinte*, exactement comme en tout point d'une surface il y a un plan tangent dans lequel se vérifient les lois de la géométrie euclidienne.

C'est ce qui résultait déjà, mais selon l'ancien langage, de l'application du *principe d'équivalence* d'Einstein à tout petit domaine *spatial* d'un champ de gravitation quelconque. On pouvait d'après ce principe choisir pour repère en tout point du champ un corps en chute libre, corps par rapport auquel le champ dans le voisinage se trouvait annulé, l'E. T. au voisinage était galiléen, et des coordonnées locales laissant au ds^2 la forme de Minkowski étaient utilisables : on avait alors affaire à un système d'inertie local. Quand on passait à un autre point très voisin du champ, en conservant le même corps comme repère, le système d'inertie local avait une certaine vitesse par rapport au premier ; et l'existence du champ se manifestait par les vitesses relatives des différents systèmes d'inertie ainsi définis en chaque point.

Ici, au lieu de points de l'espace pur, on considère des « points » de l'E. T. : tout ce qui vient d'être dit peut se répéter, et l'existence des systèmes d'inertie locaux est l'exact équivalent de l'existence des E. T. galiléens tangents. Il faut ajouter seulement, pour justifier l'usage local des systèmes d'inertie, que le caractère galiléen de l'E. T. au voisinage de tout « point » rend possible l'emploi de coordonnées locales correspondant *séparément* au

temps et à l'espace de la relativité restreinte, ce qui n'est pas le cas des coordonnées spatio-temporelles d'un E.T. quelconque sur une grande étendue.

Entre le dl^2 géométrique et le dl^2 physique il y a cette différence que celui-ci comporte un signe — ; mais cette différence n'empêche nullement d'appliquer à l'E. T. la méthode géométrique de Riemann et de ses successeurs. Le dl^2 spatial comportait en coordonnées cartésiennes rectangulaires des coefficients particulièrement simples : pour deux dimensions,

$$g_{11} = g_{22} = 1 \qquad \text{et} \qquad g_{12} = g_{21} = 0 ;$$

de même le ds^2 spatio-temporel se simplifie quand on se réfère aux coordonnées ordinaires x, y, z, t ; il a alors pour coefficients

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1 ; \qquad g_{12} = g_{13} = g_{23} = 0 \qquad \text{et} \qquad g_{44} = -c^2,$$

d'après la formule

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2 ;$$

avec un choix convenable des unités, on peut même faire $-c^2 = -1$. A cause de cette quasi-ressemblance du ds^2 et du dl^2 sous leur forme privilégiée la plus simple, l'E. T. de Minkowski est souvent qualifiée de pseudo-euclidien ; on dit aussi et à plus juste titre qu'il est *galiléen*, parce qu'il impose à un point matériel libre supposé astreint à suivre l'une de ses géodésiques la loi d'inertie de Galilée. Pour la même raison on appellera, dans la géométrie d'Univers d'Einstein, coordonnées galiléennes les coordonnées d'E. T. qui correspondront localement au choix d'un système de référence inertique. Enfin, par opposition à l'E. T. galiléen de Minkowski, l'E. T. d'Einstein sera dit *non-galiléen*, ou « courbe », comme les espaces de Riemann étaient non-euclidiens, ou courbes, à l'encontre de l'espace ordinaire.

Le problème géométrique de Riemann consistait dans la construction d'un espace non-euclidien à n dimensions à partir de ce postulat qu'en chacun de ses points cet espace admettait un espace euclidien tangent, les propriétés de l'espace à construire devant d'ailleurs se rattacher à la forme de son dl^2 et se présenter comme des relations tensorielles.

Le problème physique d'Einstein consistera à découvrir un E. T. non-galiléen dont certaines propriétés, déduites de son ds^2

sous forme tensorielle, puissent exprimer les lois physiques covariantes que suppose le principe de relativité.

Le programme peut se réaliser par étapes, et nous savons déjà que si par exemple on ne veut géométriser que la simple loi d'inertie, laissant de côté toute action é. m. et gravifique, et ne considérant que des masses soustraites à l'action de toute force au sens classique, l'E. T. correspondant n'est autre que celui de Minkowski, étant admis que les points matériels libres ont pour lignes d'Univers dans cet E. T. des « droites », en tant que lignes de longueur maxima. Une telle expression de la loi d'inertie est déjà covariante ; elle n'est cependant pas à proprement parler tensorielle ; mais il est facile de l'exprimer tensoriellement : il suffit pour cela de considérer les lignes d'Univers en question, qui sont des géodésiques de l'E. T. galiléen, comme des lignes de direction constante, c'est-à-dire dont les tangentes ont une dérivée covariante constamment nulle.

Supposons maintenant qu'on cherche à géométriser la loi de gravitation : une géométrie plus compliquée que celle de Minkowski sera nécessaire, elle sera celle d'un E. T. qui ne sera pas, en général, galiléen, mais qui cependant devra tendre à l'être là où le champ de gravitation est nul, en particulier très loin de toute masse ; donc celle d'un E. T. à structure différente suivant les régions spatio-temporelles ; de plus la loi de gravitation devra correspondre à quelque propriété structurale de cet E. T., car c'est ainsi qu'elle pourra — comme nous venons de le voir pour la loi d'inertie, — s'exprimer tensoriellement et satisfaire au principe de relativité.

Reste à savoir comment Einstein parvint en fait à découvrir une structure d'E. T. qui répondît aux données du problème de la gravitation : maintenant que nous avons dit comment le problème se pose sous son aspect géométrique il nous sera relativement facile de faire comprendre la méthode qui permit à Einstein de le résoudre.

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

PUBLIÉES SOUS LA DIRECTION DE MM.

Actualités Scientifiques et Industrielles

Série 1937 ***(suite) :***

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE R. BUSSIÈRE.